CATECHISMO

DI

MATEMATICHE PURE

AD USO DEGLI STUDI GENERALI

Parte prima — Sezione seconda

GEOMETRIA SOLIDA

GEOMETRIA SOLIDA

DI

CARLO ROCCO

Professore di Geometria nel R. Collegio Militare

SECONDA EDIZIONE

Riveduta, corretta, ed accresciuta.

Mathesis philosophiæ, et scientiis initia, ac veluti mammam praebet.
Bac.

NAPOLI

DALLO STABILIMENTO DEL GUTTEMBERG

1844

Tutti gli esemplari, che non sono muniti della firma dell' Autore, devono considerarsi come contraffatti.

PREFAZIONE

1. La benevola accoglienza fatta dal pubblico a questa nostra istituzione di geometria solida ci ha imposto il dovere di rivederla accuratamente, e di farci qua e là qualche giunta e qualche modificazione affinchè potesse meglio corrispondere all'oggetto per cui fu scritta, cioè quello di rendere la scienza facile ad apprendersi ed a ritenersi, senza toglier nulla al patrimonio di essa, ed a quel rigore, che giustamente si esige in un libro di scienze esatte. Di ciò ognuno avrà potuto convincersi; dappoichè, se non c'inganniamo, pare che siamo riusciti non solo a dimostrar tutto con grande semplicità e rigore, ma ancora ad esporre la scienza con quell'ordine, e con quel legame indispensabili per farla apprendere con grande facilità, perchè ajutano potentemente la memoria e l'intelletto dell'allievo.

2. Nella prima edizione avevamo esposto in una lunga nota, o piuttosto dissertazione, i mezzi e le vedute che ci avevano condotti ad un siffatto risultamento; ma abbiamo stimato doverla togliere nella presente, perchè le considerazioni fatte in quella nota su varii punti dili-

cati della scienza si troveranno più ampiamente sviluppate in altra scrittura, che speriamo poter pubblicare al più presto possibile. Purtuttavolta ci è sembrato di dover qui riportare alcune di quelle considerazioni, affinchè si possa acquistare una idea di ciò che abbiamo fatto; il che ci darà occasione di fare qualche nuova osservazione utile a premunire la gioventù studiosa contro certe opinioni, che in fatto d'istituzione geometrica si spacciano con gravità, e facilmente ne impongono al volgo.

3. La geometria solida può concepirsi divisa in tre parti: la prima riguarda i piani e gli angoli solidi, la seconda i poliedri, la terza i tre corpi rotondi; e queste tre parti corrispondono a quelle, nelle quali abbiamo divisa la geometria piana; perchè quivi abbiam prima parlato delle linee rette e degli angoli piani, poi dei poligoni, e finalmente del cerchio: in guisa che le teoriche della solida si trovano in esatta relazione con quelle della piana. Abbiam poi stimato di esporre la geometria solida, come avevamo già fatto per la piana, in modo che ogni capitolo contenesse una data teorica senza miscugli, per quanto era possibile, perchè così si evita il grave inconveniente di disporre le proposizioni ad arbitrio, con la sola condizione di mantenere l'esattezza delle dimostrazioni. Una siffatta divisione di teoriche riesce più difficile a praticarsi nella geometria solida che nella piana; poichè quando gli oggetti divengono complicati, convien disporli a gruppi, e non disgiungerli con minute divisioni. Quindi ci siamo sforzati di mettere fra le teoriche tal separazione che non impedisse di poter vedere, per così dire, tutta la loro fisonomia.

4. Nella teorica de' piani si è procurato non solo di togliere il disordine che vi esisteva, e di metterla in corrispondenza con la geometria piana là dove ve n'era bisogno, ma si sono ancora riempiti i vuoti di non piccolo momento esistenti in Euclide, ed in Legendre, cioè ne' due più riputati scrittori di elementi geometrici. Di ciò ognuno potrà esser convinto esaminando il nostro lavoro; e basterà qui citare la proposizione che riguarda la misura della inclinazione di una retta con un piano, che non trovasi affatto in Legendre, ed in Euclide si rinviene messa fra le definizioni in un modo imperfetto,

abbenchè sia un teorema, il quale esige una formale dimostrazione. Abbiam poi stimato di dover esporre la teorica compiuta degli angoli solidi, della quale Euclide non ci ha lasciato se non alcune nozioni imperfette, che si risentono della infanzia della scienza. La stessa teorica degli angoli solidi esposta da Legendre è stata non solo estesa, ma modificata in qualche proposizione fondamentale, come quella che riguarda l'uguaglianza degli angoli diedri, quando gli angoli piani di due angoli solidi triedri sono rispettivamente eguali. La dimostrazione di Legendre, o piuttosto di Roberto Simson, non è generale, perchè esaminandola con attenzione suppone tacitamente che due degli angoli piani accennati siano acuti. Oltre a ciò se gli angoli diedri, di cui si vuol dimostrare l'uguaglianza sono ottusi, convien considerare nella dimostrazione un secondo caso, che unito al primo rende la dimostrazione lunga e difficile per i principianti. Si è ovviato a queste difficoltà con una costruzione semplicissima che ognuno può intendere con grande facilità.

In questa seconda edizione si è cercato di render più chiara la dimostrazione della proposizione che riguarda l'angolo triedro supplementario; ed è questo il solo cangiamento fatto nella teorica de' piani e degli angoli solidi, perchè tutto il resto riducesi ad alcune parole aggiunte per servire alla chiarezza.

5. La teorica dei poliedri è monca, ed imperfetta in Euclide, come tutti sanno. I geometri moderni, e soprattutto Legendre, l'hanno perfezionata ed ingrandita con pieno successo; ma ciò non ostante il sistema di quell'antico geometra nel fondo era rimaso lo stesso; il che produceva una complicazione ed una difficoltà grande nell'apprendere una così importante teorica. Ci sembra esser riusciti ad esporla in un modo compiuto e tale che proposizioni difficili si trovano rigorosamente dimostrate con estrema facilità; il che non ha potuto ottenersi senza rifare dalle fondamenta tutta la teorica accennata, mettendo a profitto le meditazioni degli antichi e de' moderni geometri, non che le nostre, qualunque esse siano.

In questa seconda edizione il solo cangiamento notevole consiste in una proposizione da noi introdotta per la prima volta negli elementi, e nella quale si tratta di tra-

sformare un poliedro in una piramide equivalente, analoga a quella, in cui si propone di trasformare un poligono in un triangolo equivalente. La dimostrazione è stata rifatta in modo da togliere qualunque equivoco, e ci sembra di averla esposta con quella chiarezza e semplicità; che stimiamo esser così necessarie ne'libri elementari.

6. La teorica de' tre corpi rotondi comprende principalmente i così detti *teoremi di Archimede* intorno alla misura delle superficie e de' volumi del cilindro retto, del cono retto, e della sfera. Euclide si è occupato dei tre corpi rotondi nel lib. XII, ma siccome non potè darci la misura del cerchio, così non potè darci neppure la misura delle superficie e de' volumi de'tre corpi rotondi: appena arrivò a dimostrare che il cono è la terza parte del cilindro della stessa base e della stessa altezza, che i cilindri simili stanno in ragion triplicata degli assi o de' diametri delle basi corrispondenti, e che le sfere stanno come i cubi de' diametri. Or è manifesto che se si suppongono i teoremi di Archimede, quelli dimostrati da Euclide intorno ai corpi rotondi non sono che semplicissimi corollarj; e per conseguenza quasi tutto il lib. XII di Euclide diviene perfettamente inutile; il che unito a quanto si è detto più sopra dimostra in modo incontrastabile che la geometria solida di Euclide dev' essere eliminata dall' insegnamento, e dev' esser rimessa nelle mani de' geometri fatti, come è avvenuto per i libri di Apollonio, e dello stesso Archimede, che da gran tempo sono stati tolti dalle mani della gioventù studiosa per opera degli stessi ammiratori degli antichi geometri. Che dunque dovrà pensarsi della usanza materiale invalsa per sì luogo tempo nelle scuole, e che tuttavia si mantiene in alcune di esse, cioè di obbligare lo studente di Matematica ad imparare i due libri della geometria solida di Euclide, e dopo questi passare a studiare i teoremi di Archimede, che gli Euclidisti vi aggiungono, senza darne per altro le dimostrazioni lasciateci dal sommo geometra di Siracusa, perchè sono di una complicazione, e di una difficoltà tale che stancherebbe e confonderebbe la mente di un principiante?

Dalle cose fin quì esposte risulta manifesto che per rag-

giungere lo scopo propostoci, cioè quello di ridurre la scienza alla più grande semplicità e brevità possibile, non mancando alla chiarezza ed al rigore, era necessario che nella teorica de' corpi rotondi avessimo messo da parte le dimostrazioni lasciateci da Euclide, e da Archimede, e ci fossimo rivolti totalmente a quelle de' geometri moderni, i quali hanno il merito innegabile di aver esposto la teorica accennata con ordine rigoroso, senza le logiche incongruenze di certi appassionati lodatori, e cattivi interpreti degli antichi geometri, che più sopra abbiamo segnalate.

7. Ma qui insorgeva un'altra difficoltà, cioè quella di dovere scegliere tra le diverse dimostrazioni, che i geometri moderni han dato dei teoremi di Archimede. Il celebre Legendre ha preferito di attenersi a quelle che fece Maurolico, geometra siciliano, in una sua parafrasi assai stimata delle opere di Archimede, che venne pubblicata a Palermo nel 1685 (*).

Quantunque Maurolico sia giunto ad evitare le complicazioni e le lungherie degli antichi geometri, ed a far dipendere le sue dimostrazioni da un solo principio, che sagacemente ricavò dal lib. XII di Euclide (prop. 16), pure bisogna confessare che la maniera da esso tenuta ha il difetto notabile di una uniformità che confonde e stanca; e sebbene abbia il vantaggio di parlare agli occhi, non per tanto il giro del ragionamento ha un non so che di tortuoso che rende le proposizioni difficili ad apprendersi ed a ritenersi, come vien provato dal fatto nell'insegnamento. Di più, le dimostrazioni di Maurolico non sono senza replica, almeno per quelli che pretendono potersi dimostrare i teoremi di Archimede senza la considerazione dell'infinito. Per con-

(*) Legendre non ha nominato Maurolico, ma non ha mai preteso appropriarsi le dimostrazioni di questo celebre geometra, abbenchè le avesse notevolmente modificate ed estese da suo pari. All' opposto uno de' nostri tanti traduttori di Euclide dopo di aver fatto uso delle dimostrazioni accennate ne' così detti *teoremi di Archimede*, nell' edizione del 1843 dice di essersi incontrato in quelle stesse dimostrazioni di Maurolico, che non avea mai conosciute: ed ecco le cose patrie ignorate da quelli stessi che dovrebbero conoscerle; e che per giunta ci rimproverano di ricorrere a libri stranieri nell'insegnamento delle Matematiche!

vincersi di ciò basterà vedere come Maurolico dimostra, che il cerchio è uguale ad un rettangolo, di cui un lato rappresenta la circonferenza, e l'altro la metà del raggio: se il cerchio proposto, egli dice, non è uguale a quel rettangolo, vi dovrà essere un cerchio o maggiore o minore del rettangolo medesimo, ed appoggiandosi alla possibilità che vi sia, egli arriva a provare per assurdo che il cerchio proposto dev'esser uguale al rettangolo, di cui è parola. Or è manifesto che quella possibilità può negarsi; e per conseguenza tutta la dimostrazione precipita dalle fondamenta. Egli è vero che Maurolico da geometra profondo ha preveduto la difficoltà; dappoichè nella sua opera si sforza di dimostrare l'indicata possibilità in un lemma; ma quella sua dimostrazione, a tutto rigore, non può sussistere; poichè egli assume come evidente che il rapporto esistente tra un cerchio ed un rettangolo possa esser espresso da due linee; il che suppone quello ch'è in quistione, cioè la possibilità di trasformare il cerchio in un poligono equivalente.

Per giustificare le dimostrazioni di Legendre, o piuttosto di Maurolico, intorno alla misura del cerchio, e quindi de' tre corpi rotondi, il signor Duchesne, geometra francese, ha detto che a partire da zero dando al raggio tutt'i valori possibili si può sempre concepire l'esistenza di un cerchio equivalente ad un rettangolo dato. È questa l'unica idea che possa porsi in campo in difesa di quelle dimostrazioni; e però ognun vede che bisogna ricorrere alla considerazione dell'infinito, ed allora non vale la pena di adottare le dimostrazioni accennate, le quali sono indirette ed hanno qualche volta bisogno di lunghe preparazioni, come avviene soprattutto nella misura della solidità della sfera.

8. Noi abbiam provato nella prima edizione in una nota più sopra citata, che nelle stesse dimostrazioni genuine di Archimede sulla misura del cerchio, e quindi de' tre corpi rotondi, v'era mascherata la considerazione dell'infinito, ma non tolta effettivamente; dappoichè quel sommo geometra è costretto a ricorrere ad un principio, di cui non trovasi fatto uso prima di lui, cioè che la circonferenza del cerchio è maggiore del perimetro del poligono regolare iscritto, ed è minore del

circoscritto. Or un siffatto principio non è evidente, e perciò si sono sforzati a dimostrarlo non solo i geometri moderni, ma anche gli antichi, come appare dalla dimostrazione lasciataci da Eutocio. Ma queste dimostrazioni alla fine de' conti non possono reggere senza la considerazione dell' infinito, cioè senza considerare il cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati. Per la qual cosa, quando anche si arrivasse a dimostrare rigorosamente, ed indipendentemente dalla misura del cerchio, l' esistenza di un cerchio equivalente ad un rettangolo dato, le dimostrazioni di Maurolico avranno sempre bisogno della considerazione dell'infinito, perchè hanno bisogno del citato principio di Archimede (*).

9. Lacroix, ed altri dotti geometri, si sono appigliati al così detto *metodo de' limiti* per dimostrare i teoremi di Archimede. Questo metodo non è in sostanza, se ben vi si rifletta, che lo stesso *metodo di esaustione* adoperato da Archimede e da Maurolico, ma scevro delle sue complicazioni, poichè il giro astratto del ragionamento che in esso si adopera si riduce sempre ad alcuni principj generali, con l' ajuto de' quali si evita la pesantissima riduzione all' assurdo, ch' è indispensabile nelle dimostrazioni di Archimede, e di Maurolico. Abbenchè il metodo de' limiti sia assai prezioso, e superiore di gran lunga a quello di esaustione, e di esso si faccia uso grandissimo, appena si vada al di là degli elementi, pure non abbiamo stimato doverlo adottare nella teorica de' tre corpi rotondi: in primo luogo perchè nell' applicare que' principj generali ai casi particolari, s' incontra forse tanta lungheria quanta nel metodo di esaustione, almeno (come giustamente riflette il dotto Gergonne) quando si vogliano fare le dimostrazioni in modo da non lasciar luogo ad alcun dubbio; e quindi dovendosi scendere a tutte le particolarità necessarie non

(*) È curioso che il traduttore, di cui si parla nella nota precedente, dopo di aver fatto uso delle dimostrazioni di Maurolico, che poggiano in sostanza sulla considerazione dell' infinito, non cessi di declamare contro i moderni scrittori di elementi geometrici, accusandoli d' introdurre nella scienza la *paradossale idea dell' infinito*!

si vede perchè il metodo de' limiti debba preferirsi, negli elementi, al metodo di esaustione, il quale quantunque in un modo indiretto ha però una forma tale che non lascia alcun dubbio nella mente. In secondo luogo, e questa è la ragione più forte per noi, perchè il metodo de' limiti ha bisogno del principio di Archimede, cioè delle figure iscritte e circoscritte; e quindi si trova anche in esso mascherata la considerazione dell' infinito, ma non tolta.

10. Non ci restava dunque altra via che quella di ricorrere al così detto *metodo degli infinitamente piccoli*, cioè a quel metodo, in cui si adopera la considerazione dell' infinito apertamente senza orpello o mistero. Le dimostrazioni fatte con questo metodo non hanno bisogno del principio di Archimede; e perciò riescono brevissime, s' imprimono facilmente nella memoria, e di più conservano le tracce della invenzione. E si noti che quando un siffatto metodo venga adoperato come si conviene, e non degeneri in certe vaghe ed arbitrarie forme di ragionamento, che si trovano in alcuni scrittori di elementi, esso è tanto esatto quanto quello di esaustione adoperato da Archimede, e quello de' limiti seguito dai geometri moderni (*).

Ma si potrà dire: se il principio di Archimede è la conseguenza che risulta dal considerare il cerchio come un poligono regolare di un numerò infinito di lati, perchè si dovrà far uso di questo oscuro concetto, nel quale si riguarda l' infinito come realmente esistente, e non servirsi piuttosto di quel principio Archimedeo che ha il vantaggio innegabile di rimanersi tra le quantità finite, e perciò si presenta limpido e chiaro alla mente? L'osservazione è giusta; ma dalle cose sopraddette apparisce manifesto che operando in tal modo non si conse-

(*) In methodo infinitesimali cavendum, ne contemnatur aliquid, quod non decrescat ultra quoscumque limites in se determinatos respectu ejus, respectu cujus contemnitur; quod si caveatur, nullus error usquam committi poterit.

Methodus, quam *exhaustionum* vocant, eodem fundamento innititur, quo methodus infinitesimalis; sed multo est implicatior et longior.

Boscovich, Tom. I, p. 164.

guirebbe il rigore che si nega al metodo degl' infinitamente piccoli, perchè si fonderebbe la misura del cerchio e la teorica dei tre corpi rotondi sopra un principio assunto senza dimostrazione, e si renderebbe la scienza difficile ad apprendersi ed a ritenersi. Ed infatti abbiam veduto che gli antichi e moderni geometri lungi dal riguardare come evidente il principio accennato hanno cercato di dimostrarlo a rigore, abbenchè non vi siano riusciti senza la considerazione dell' infinito; e che anche i più appassionati panegeristi degli antichi non hanno avuto il coraggio di riportare le dimostrazioni genuine di Archimede, ma vi hanno supplito in altri modi che non hanno, per esattezza, alcuna reale superiorità sul metodo degl' infinitamente piccoli; poichè *nascondono* la idea dell' infinito senza poterla togliere effettivamente, essendo inerente alla natura del soggetto. Una siffatta idea s' incontra fin dall' entrata della scienza nella teorica delle rette parallele, nel passaggio dalle quantità commensurabili alle incommensurabili, e finalmente in quello della linea retta alla curva, come avviene nella misura del cerchio, e quindi nella teorica de' tre corpi rotondi. Gli antichi in questi tre casi evitarono la considerazione dell' infinito con assumere tre principj come evidenti, cioè il postulato V. di Euclide, il principio degli ugualmente moltiplici, ed il principio di Archimede. Se non si avesse riguardo ai tempi, noi diremmo ch' è questa una maniera assai *comoda* di levare le difficoltà che presenta la natura del soggetto; poichè, come è noto, quei tre principj non sono alla fine de' conti che tre teoremi, che devono essere dimostrati, e non si possono dimostrare senza la considerazione dell' infinito, come è facile restarne convinti esaminando rigidamente le dimostazioni che ne sono state fatte a cominciare dagli antichi greci fino ai geometri de' nostri giorni (*). Le difficoltà

(*) In un rapporto alla R. Accademia di Parigi sulla traduzione francese delle opere di Archimede fatta dal Peyrard, il celebre Lagrange fa menzione, senza dissaprovarla, della opinione di quei geometri, i quali sostengono non potersi dimostrare il principio archimedeo senza la considerazione dell' infinito, il che, come ognun vede, dà gran peso a quanto qui sopra abbiam detto.

non si vincono col dissimularle, ma con attaccarle di fronte. E qui si noti che gli antichi evitando, almeno in apparenza, la considerazione dell'infinito, agirono saggiamente, perchè mancavano delle risorse che ora abbiamo; ma è strano il vedere con quanta cura alcuni geometri moderni si sono sforzati a mascherare l'idea dell'infinito, che volere o non volere s'incontra sempre nei teoremi di Archimede, ed un siffatto procedere è tanto più sorprendente quanto che « la considerazione dell'in» finito costituisce, per così dire, lo spirito delle mate» matiche moderne, le quali per essa appunto si sono » rese tanto superiori alle antiche ».

11. Malgrado la chiarezza delle precedenti ragioni, e di altre molte che uomini di miglior ingegno del nostro hanno dette, o potranno dire in appresso, siamo ben persuasi che, la forza di un'antica tradizionale opinione farà sì che non pochi continueranno ad essere immobilmente attaccati alle antiche forme di ragionamento; e non vorranno mai ammettere che la considerazione dell'infinito possa introdursi senza maschera negli elementi di geometria. Ad imitazione degli antichi Pittagorici, di cui fa menzione uno scoliaste di Euclide, grideranno la croce addosso a chi farà uso di quella considerazione per render piana e facile la istituzione geometrica; e non mai avranno per buona una dimostrazione, se non quando conservi una cert'aria di mistero, e sia appoggiata a ragionamenti lunghi e difficili. Questi geometri trascendentali credono profanata la scienza, quante volte le dimostrazioni non sono esposte con quel pedantesco giro di parole, che il dottissimo Lacroix ha giustamente chiamato *lo stile de' curiali*; e (cosa da non credersi) si sdegnano ancora che nella geometria s'introduca l'ordine rigoroso delle proposizioni, e quel legame che serve a mostrare tutt'i punti di contatto di esse, ed a predurre nella mente una piena acquiescenza! Nella opinione di questi sapienti il disordine nelle proposizioni, ed il pesante e dommatico apparato nelle dimostrazioni costituiscono il sublime di una istituzione geometrica; e un traduttore di Euclide, di cui abbiam fatto menzione nelle note precedenti, spinge il suo entusiasmo per le antiche forme fino a dire che tutte le istituzioni moderne di geome-

tria sono perniciose alla gioventù studiosa, non ricavandosi da esse che scienza erronea e fallace; e che i soli elementi di Euclide meritano di esser messi nelle mani della gioventù; dappoichè, egli dice, siffatti elementi sono l'opera più perfetta che sia uscita dalla mente umana, e di più sono buoni e sufficienti per i tempi passati, presenti, e futuri, qualunque siasi il progresso che le matematiche potranno fare in avvenire! (*). In vano voi gli domandate le prove di queste matte asserzioni; al più vi cita l'autorità *di 14 secoli culti*, e le opinioni di alcuni matematici, che interpetra a suo modo, e non manca mai di aggiungere alcune frasi che sembrano ragioni, ma non sono in sostanza che pure e prette maldicenze contro coloro, che in vece di dar ascolto alle sue declamazioni, si sono apertamente sottoscritti al giudizio della R. Accademia di Parigi, contenuto in un rapporto fatto dai celebri matematici Prony, Delambre, e Poinsot, e da essa approvato, vale a dire che: ***non sarebbe ascoltato chi oggigiorno proponesse di cominciare lo studio delle matematiche da Euclide*** (**). E si noti che quell' illustre corpo scientifico possedeva allora i Lagrange, i Laplace, i Monge, i Legendre, i Fourier, i Poisson, i Cauchy, i Biot, gli Arago, ed altri matematici insigni, i cui scritti viveranno lungo tempo nella memoria de' posteri. Noi che non abbiamo avuto la fortuna di esser traduttori e restauratori di antichi geometri, e che amiamo contemplare le matematiche nel loro incremento attuale, e non al traguardo di 14 secoli culti, confessiamo di aver da gran tempo sottocritto a quell' autorevole giudizio, a cui, (chi il crederebbe?) pare che abbia sottoscritto lo stesso traduttore, di cui parliamo; dappoichè in una sua istituzione di geometria pubblicata nel 1804 si esprime in tal modo: « ho cercato di render le dimostrazioni così chiare e precise » che potessero senza stento comprendersi da' giovanetti, » non essendo ad essi possibile tener dietro colla mente

(*) Vedi *Prospetto di un Corso di Matematiche* in 24 vol. in 4, non che le prefazioni e le note ai volumi già pubblicati.

(**) Vedi le opere di Euclide tradotte in francese dal celebre Peyrard.

» a quelle di Euclide, le quali chi ben le conosce sa,
» che richieggono un'attenzione ed uno spirito singola-
» re, ed a coloro, che s'istruiscono nè necessario, nè
» comune ».

È questo il più bel commento che si poteva fare a quella sentenza degli accademici di Parigi; onde non aggiungeremo altro, limitandoci a raccomandare alla gioventù studiosa che coltivi le matematiche nello stato d'incremento e di progresso in cui sono, e non in quello, in cui erano due mila e più anni indietro.

GEOMETRIA SOLIDA

SEZIONE SECONDA

CAPITOLO I.

DELLA LINEA RETTA E DEL PIANO IN GENERALE.

1. La *Geometria Solida* considera l'estensione nelle sue tre dimensioni; per cui le linee rette ed i piani si riguardano come situati in qualsivoglia modo nello spazio. E qui giova ricordarsi che la linea retta è di sua natura indefinita, come pure il piano, abbenchè spesso occorra di dover considerare soltanto una parte limitata dell'una, o dell'altro. Laonde quando si dice che un punto è situato fuori di una linea retta, o fuori di un piano, si deve intendere che il punto accennato trovasi al di sopra, o al di sotto della retta, o del piano; o sia sempre fuori de' loro prolungamenti.

PROPOSIZIONE I — *TEOREMA.*

2. *Una linea retta non può avere una sua parte in un piano, e la rimanente fuori del piano medesimo* (fig. 1).

Dimostrazione. Rappresenti la figura *MN* un piano qualunque, e si supponga che la linea retta *ABD* abbia una parte *AB* nel piano *MN*, e la rimanente *BD* fuori di questo piano. Essendo *AB* una linea retta, essa potrà prolungarsi in *C* nel piano *MN*; per conseguenza le due rette *ABD*, *ABC* avrebbero due punti comuni *A*, e *B* senza coincidere in tutta la loro estensione; ma ciò è impossibile, dunque una linea retta non può avere una parte in un piano, e la rimanente fuori del piano medesimo. *C. D. D.*

3. *Corollario.* Apparisce da questo teorema che una linea retta

non può incontrare un piano in più di un punto; poichè se lo incontrasse in due punti, dovrebb' essere tutta intera situata nel piano medesimo. Il punto d'incontro di una retta con un piano dicesi il *piede* della retta sullo stesso piano.

PROPOSIZIONE II — *TEOREMA*.

4. *Un triangolo qualunque è situato in un solo piano* (fig. 2].

Dim. Sia *ABC* un triangolo qualunque. Se una sua parte *BDEC* fosse situata in un piano, e la rimanente *DAE* in un altro, la retta *AB* avrebbe una sua parte *BD* nel primo piano, e l'altra *DA* nel secondo; il che non può sussistere (n.° 2); dunque un triangolo è sempre in un solo piano. *C. D. D.*

5. *Corollario*. Si deduce da questo teorema che *per tre punti* A, B, C *non disposti in linea retta passa un solo e medesimo piano*.

Infatti, congiungendo i tre punti colle rette *AB*, *AC*, *BC*, il triangolo *ABC* è situato in un solo piano. Quindi per un punto *A* posto fuori di una retta *BC*, e per questa retta medesima si può sempre far passare un piano; poichè basta prendere due punti *B*, e *C* ad arbitrio nella retta accennata, e condurre il piano per i tre punti *A*, *B*, *C*; nè altro piano potrà passare per la data retta e pel punto dato.

PROPOSIZIONE III — *TEOREMA*.

6. *Due rette che s' incontrano sono situate in un medesimo piano* (fig. 3).

Dim. Perocchè, prendendo ad arbitrio due punti *P* e *N* nelle due rette *NM*, e *PQ* che s' incontrano nel punto *F*, e condotta la retta *PN*, le due linee *PF*, e *NF* sono situate nel piano del triangolo *PFN*: per cui anche le rette *MN*, e *PQ* dovranno trovarsi nel medesimo piano (n.° 2). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE IV — *TEOREMA*.

7. *Una retta che incontra due altre situate in un piano, dovrà trovarsi nel medesimo piano* (fig. 4).

Dim. Infatti, supponendo che la retta *HO* incontri le rette *AB*, e *CD* situate in uno stesso piano, i punti *L*, ed *E* d'incontro si troveranno nel detto piano; e però tutta la retta *HO* dovrà stare nel piano medesimo (n.° 3). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE V — *TEOREMA*.

8. *L' intersezione comune di due piani che s' incontrano è una linea retta* (fig. 5).

Dim. Sia AB l'insersezione comune di due piani MN, e PQ. È manifesto che questa intersezione deve essere una linea, ed una linea retta; perocchè se potesse essere una porzione di superficie, o una linea curva, i due proposti piani avrebbero sempre più di due punti di comune non disposti in linea retta, e si confonderebbero l'uno con l'altro (n.° 5) contro la supposizione; dunque l'intersezione comune di due piani è una linea retta. *C. D. D.*

9. *Scolio.* I principj fin qui esposti sono, come si è veduto, corollarj manifesti della nozione che abbiamo della linea retta, e del piano; in guisa che si potrebbero considerare quasi come assiomi. Essi sono della più grande importanza, perchè sopra siffatti principj semplicissimi è stabilita tutta la geometria solida.

Or siccome nella geometria piana la prima cosa che abbiamo considerata è stato l'incontro, o il non incontro delle rette situate in un piano, così pure nella geometria solida la prima cosa da considerarsi dovrà essere l'incontro, o il non incontro delle linee rette con i piani, e l'incontro, o il non incontro dei piani fra loro, senza che lo spazio rimanga chiuso da per ogni dove.

CAPITOLO II.

DELLE RETTE PERPENDICOLARI, ED OBLIQUE AI PIANI.

10. Per una medesima linea retta AP (fig 6) può passare una infinità di piani differenti; dappoichè un piano può girare intorno di una linea retta condotta in esso comunque, e prendere in questo modo un numero infinito di situazioni diverse senza che i punti della retta cangiano sito. Ciò premesso, si facciano passare per la retta AP due piani differenti APB, ed APC, indi da un medesimo punto P di questa retta si conducano sopra AP le perpendicolari PB, PC, l'una nel piano APB, e l'altra nel piano APC. Or queste due perpendicolari determinano la posizione di un piano MN, poichè s'incontrano nel punto P (n° 6), per conseguenza riesce naturale il ricercare se tirando pel punto P nel medesimo piano MN una qualunque altra retta PD, questa sia pure perpendicolare ad AP.

PROPOSIZIONE VI — *TEOREMA.*

11. *Se una retta* AP *è perpendicolare a due rette* PB, PC *che s'intersegano nel suo piede* P *nel piano* MN, *essa sarà perpendicolare a qualsivoglia retta* PD *condotta pel punto* P *nel piano medesimo* (fig. 6),

Dim. Si prolunghino le rette PB, PC, PD, verso H, E, F, si prenda PB uguale a PH, e PC uguale a PE, e si tirino le rette BC, EH; indi da un punto A della perpendicolare AP si conducano le rette AB, AH, AC, AE, AD, AF.

Poichè l'angolo BPC è uguale al suo verticale EPH, il triangolo

BPC sarà uguale al triangolo EPH; per conseguenza si avrà $BC = EH$, e l'angolo $PCD = PEF$. Or essendo di più l'angolo DPC uguale al suo verticale EPF, ed il lato $PC = PE$, ne segue che il triangolo DPC è uguale al triangolo EPF; e perciò risulta $PD = PF$, e $DC = EF$. Da un'altra parte nel piano ABH le oblique AB, AH sono uguali come equidistanti dalla perpendicolare AP, e lo stesso deve dirsi delle oblique AC, AE nel piano ACE, dunque i triangoli ABC, AEH sono equilateri fra loro, e però l'angolo ACD è uguale all'angolo AEF. Quindi i due triangoli AEF, ACD hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali, per cui sono uguali, ed il lato AD è uguale al lato AF. Finalmente i triangoli APD, APF risultano equilateri fra loro, e però l'angolo APD sarà uguale all'angolo APF, ovvero AP è perpendicolare a PD. *C. D. D.*

12. *Scolio* I. Una retta dicesi *perpendicolare* ad un piano quando è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo piede in questo piano; poichè in tal caso forma angoli adiacenti uguali con tutte le rette accennate.

Reciprocamente, un piano si dice perpendicolare ad una retta, allorchè contiene tutte le perpendicolari condotte a questa retta per un medesimo punto di essa.

13. *Scolio* II. È facile vedere che la proposizione precedente equivale alla seguente:

Se l'angolo retto APC *gira intorno ad un suo lato* AP *supposto immobile, l'altro lato* PC, *che non cesserà di essere perpendicolare ad* AP, *descriverà nel suo movimento il piano* MN *perpendicolare ad* AP (fig. 6).

Infatti, supponendo che il lato mobile PC sia giunto in PB, il piano che passa per queste due rette è determinato, e la retta PC in tutte le sue posizioni non potrà mai trovarsi fuori di questo piano, perchè tutte le rette che si conducono pel punto P nel piano MN sono perpendicolari ad AP, e quindi coincidono con le varie posizioni del lato mobile PC.

PROPOSIZIONE VII — *TEOREMA*.

14. *Per un punto dato non si può condurre ad un piano che una sola perpendicolare* (fig. 7).

Dim. Sia A un punto situato fuori del piano MN, e si supponga, se è possibile, che le rette AP, AD sieno due perpendicolari a questo piano; indi si conduca la retta PD. Nel triangolo APD vi sarebbero due angoli retti; il che è assurdo; dunque dal punto A non si può abbassare sul piano MN che una sola perpendicolare.

Se poi il punto dato è P nel piano MN, e si supponga che le rette PA, PE sieno due perpendicolari al piano medesimo, allora facendo passare per le dette perpendicolari un piano che tagli il piano MN secondo la retta PD, gli angoli APD, EPD sarebbero retti

ambedue; e però la parte sarebbe uguale al tutto, il che non può sussistere. Dunque per un punto dato non si può condurre ad un piano che una sola perpendicolare. *C. D. D.*

PROPOSIZONE VIII — *PROBLEMA.*

15. *Per un punto* A *situato fuori di un piano* MN *abbassare una perpendicolare sopra questo piano* (fig. 8).

Soluzione. Si conduca una retta *BC* nel piano *MN*, per questa retta e pel punto *A* si faccia passare un piano (n. 5), indi in questo si abbassi sopra *BC* la perpendicolare *AD*, e dal punto *D* si conduca nel piano *MN* la retta *DP* perpendicolare a *BC*. Finalmente si faccia passare un piano per le rette *AD*, *DP*, ed in questo piano si cali sopra *DP* la perpendicolare *AP*, questa sarà perpendicolare al piano *MN*.

Infatti, si prenda *BD*=*CD*, e si tirino le rette *PB*, *PC*, *AB*, *AC*. Il quadrato di *AB* è uguale ai quadrati di *AD*,e *DB*, perchè è retto l'angolo *ADB*; ma per la stessa ragione il quadrato di *AD* è uguale alla somma de'quadrati di *AP*, *PD*, dunque sarà il quadrato di *AB* uguale alla somma dei tre quadrati di *AP*, *PD*, *DB*, ovvero de'quadrati di *AP*, *PB*, perchè è retto l'angolo *PDB*. Quindi l'angolo *APB* è retto, e nello stesso modo potendo dimostrarsi che l'angolo *APC* è retto, ne segue che *AP* è perpendicolare al piano *MN* (n.° 11). *C. D. F.*

PROPOSIZIONE IX — *TEOREMA.*

16. *Se da un punto* A *situato fuori di un piano MN si conducano sopra questo piano la perpendicolare* AP, *e differenti oblique* AB, AD, AC, AE, ecc.

1.° *La perpendicolare sarà più corta di ogni obliquo.*

2.° *Le oblique equidistanti dalla perpendicolare saranno uguali fra loro.*

3.° *Di due oblique qualunque quella che più si allontana dalla perpendicolare sarà la più lunga* (Fig. 6).

Dim. Infatti, se si conducano le rette *PB*, *PD*, *PC*, *PE*, ecc.; e si facciano girare gli angoli retti *APC*, *APD*, *APE*, ecc: intorno ad *AP*, tutte le oblique potranno ridursi ad essere situate in un medesimo piano *ABH*; e per conseguenza il teorema proposto si dimostrerà come nella geometria piana (n. 75). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE X — *TEOREMA*

17. *Se da un punto* A *della retta* AD *obliqua al piano* MN *si abbassi la perpendicolare* AP *sopra questo piano, e si conduca la retta* DP, *l'obliqua* AD *sarà perpendicolare alla retta* BC *tirata perpendicolarmente a* DP *nel piano* MN (fig. 8).

Dim. Si prenda $BD = CD$, e si tirino le rette PB, PC, AB, AC. Essendo $BD = CD$, le obblique PB, PC saranno uguali perchè equidistanti dalla perpendicolare PD. Parimente le oblique AB, AC saranno uguali come equidistanti dalla perpendicolare AP, dunque rispetto ad AD le rette AB, AC sono due oblique uguali, ed equidistanti. e per conseguenza AD è perpendicolare a BC. *C. D. D.*

18. *Corollario*. Essendo la retta BC perpendicolare alle due rette DP, e DA, sarà perpendicolare al piano APD che passa per le rette medesime (n. 11).

PROPOSIZONE XI — *PROBLEMA*

19. *Da un punto* D *situato nel piano* MN *innalzare una perpendicolare sopra questo piano* (fig. 9).

Sol. Da un punto A situato fuori del piano MN si abbassi sopra questo piano la perpendicolare AP, e si conduca la retta PD; indi si faccia passare per le rette AP, PD un piano, nel quale si tiri la retta DE perpendicolare a DP, sarà DE la perpendicolare richiesta. Infatti, se si conduca la retta BC perpendicolarmente a DP nel piano MN, l'angolo EDB sarà retto; perchè BD è perpendicolare al piano $APDE$ (n. 18), e per conseguenza a tutte le rette che sono in esso come la DE. Ma per costruzione è retto l'angolo EDP, dunque la retta ED è perpendicolare alle due rette DP, DB, e però è perpendicolare al piano MN. *C. D. F*,

PROPOSIZIONE XII — *PROBLEMA*.

20. *Per un punto* O *di una retta* AE *condurre un piano perpendicolare a questa retta* (fig. 10).

Sol. Si facciano passare per la retta data due piani qualunque. In uno di questi piani si conduca la retta OB perpendicolare ad AE; e nell'altro la retta OC anche perpendicolare ad AE. Finalmente per le rette OB, OC si faccia passare un piano MN, questo sarà perpendicolare alla retta data (n° 12); poichè essendo AO perpendicolare alle due rette OB, OC, dev'essere perpendicolare al piano determinato da queste rette. *C. D F.*

PROPOSIZIONE XIII. — *PROBLEMA*.

21. *Per un punto* B *situato fuori di una retta* AE *condurre un piano perpendicolare a questa retta* (fig. 10).

Sol. Pel punto dato B e per la retta AE si conduca un piano, nel quale si abbassi BO perpendicolare sopra AE; secondo questa ultima retta si conduca un altro piano qualunque, ed in essa s'innalzi OC perpendicolare ad AE. Finalmente per le rette BO, ed OC si faccia

passare un piano; questo sarà il piano richiesto: poichè contiene *BO*, ed *OC* ambedue perpendicolari ad *AB*. *C. D. F.*

CAPITOLO III.

DELLE RETTE PARALLELE FRA LORO, E DELLE RETTE PARALLELE AI PIANI.

22, Nella proposizione X (fig. 9) si è veduto che le rette *BC*, *AP*, situate l'una nel piano *MN*, l'altra nel piano *APD*, sono perpendicolari ad una medesima retta *DP*. Or è da osservarsi che quantunque queste due perpendicolari non possono incontrarsi, pure non si dicono *parallele*; dappoichè si è convenuto di chiamar esclusivamente *rette parallele* quelle ch'essendo situate in un medesimo piano non s'incontrano mai. Epperò quando si mette per ipotesi che due rette date sono parallele, si sottintende implicitamente che sono poste in un medesimo piano. Da ciò ne consegue che *Due rette parallele determinano la posizione di un piano*.

23. Una retta si dirà essere *parallela* ad un piano, allorchè prolungandosi l'una e l'altro non s'incontrano mai.

PROPOSIZIONE XIV — *TEOREMA*

24. *Se due rette* AP, ED *sono parallele, ed una di esse è perpendicolare ad un piano* MN, *anche l'altra sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig 9).

Dim. Sia *AP* perpendicolare al piano *MN*: si tirino le rette *PD*, *AD*, e nel piano *MN* si conduca a *DP* la perpendicolare *BC*, questa sarà pure perpendicolare al piano *APD* (n° 18), ovvero al piano *APDE* delle parallele *AP*, *DE*. Quindi sarà retto l'angolo *EDB*; ma in virtù delle medesime parallele è anche retto l'angolo *EDP*, dunque la retta *ED* è perpendicolare alle due *DB*, *DP*, e per conseguenza al piano *MN*. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XV — *TEOREMA.*

25. *Due rette* AP, ED *perpendicolari ad un medesimo piano* MN *sono parallele fra loro* (fig. 9).

Dim. Perocchè, se *ED* non è parallela ad *AP*, si conducano le rette *PD*, *AD*, e nel piano *APD* si tiri pel punto *D* una retta parallela ad *AP*, la quale sarà perpendicolare al piano *MN* (n° 24). Ma per ipotesi anche *DE* è perpendicolare ad *MN*; dunque si potrebbero innalzare dal punto *D* due perpendicolari ad un medesimo piano; il che è assurdo; e però *ED* è parallela ad *AP*. *C. D. D.*

26. *Corollario.* Segue da questo teorema che per un punto *P* preso fuori di una retta *ED* non si può condurre a questa retta che

una sola parallela PA. Infatti, pel punto P si faccia passare un piano MN perpendicolare alla retta DE (n° 20) ; se pel punto P si potesse condurre a DE un' altra parallela, questa sarebbe perpendicolare al piano MN, ed allora per uno stesso punto si potrebbero innalzare due perpendicolari al piano MN, il che non può sussistere.

PROPOSIZIONE XVI — *PROBLEMA*.

27. *Per un punto dato condurre una parallela ad una retta data* (fig. 9).

Sol. Sia P il punto dato, e DE la retta data ; per questo punto e la retta accennata si faccia passare un piano, nel quale si conduca PA parallela a DE, è manifesto che PA sarà la parallela richiesta. *C. D. F.*

PROPOSIZIONE XVII — *TEOREMA*.

28. *Due rette* AB, DF *parallele ad una terza* CE *sono parallele fra loro* (fig. 11).

Dim. Per un punto E della retta CE si conduca un piano perpendicolare a questa retta (n° 20), le rette AB, DF essendo per ipotesi parallele a CE, saranno perpendicolari al piano MN (n° 24). e però saranno parallele fra loro. *C. D.D.*

29. *Scolio.* Il teorema analogo; cioè quando le tre rette sono situate in un medesimo piano è stato dimostrato nella geometria piana (n° 48).

PROPOSIZIONE XVIII — *TEOREMA*.

30. *Se una retta* AB *situata fuori di un piano* MN *è parallela ad una retta qualunque* CD *condotta in questo piano, essa sarà parallela al piano medesimo* (fig. 12),

Dim. Essendo parallele le rette AB, CD, saranno situate in un medesimo piano $ABCD$; per conseguenza se AB prolungata incontrasse il piano MN dovrebbe ancora incontrare la retta CD, contro la supposizione; dunque AB è parallela al piano MN. *C. D. D.*

CAPITOLO IV.

DEI PIANI PARALLELI FRA LORO.

31. Due piani si dicono *paralleli*, allorchè prolungati indefinitamente non possono incontrarsi.

PROPOSIZIONE XIX — *TEOREMA*

32. *Due piani* MN, PQ *perpendicolari ad una medesima retta* AB *sono paralleli fra loro* (fig. 13)

Dim. Perocchè se i due piani non sono paralleli, prolungati sufficientemente dovranno incontrarsi: sia O un punto della loro comune intersezione, e da questo punto si tirino le rette OA, OB, che giaceranno nei piani. Essendo per ipotesi la retta AB perpendicolare ai due piani, gli angoli OAB, OBA saranno retti (11); per conseguenza nel triangolo OAB vi sarebbero due angoli retti; il che è assurdo; dunque i due piani sono paralleli. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XX — *TEOREMA.*

33. *Le intersezioni* AB. CD *di due piani paralleli* MN, PQ *con un terzo piano* ABCD *sono parallele fra loro* (fig. 12).

Dim. Infatti, se AB potesse incontrare CD, il punto d'incontro dovrebbe trovarsi nei due piani MN. PQ; ma per ipotesi questi due piani sono paralleli, e perciò non possono avere alcun punto comune, dunque anche AB è parallela a CD. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXI — *TEOREMA.*

34. *Se due piani* MN, PQ *sono paralleli, ogni retta* AB *perpendicolare all'uno è ancora perpendicolare all'altro* (fig. 13).

Dim. Sia AB perpendicolare al piano PQ; si conduca una retta BC comunque nel piano medesimo, indi per le due AB, BC si faccia passare un piano che tagli il piano MN secondo la retta AD. Essendo per ipotesi paralleli i due piani MN, PQ, le intersezioni AD, BC di questi piani col piano $DABC$ saranno parallele (n. 33); ma AB è perpendicolare a BC, perchè si è supposta perpendicolare al piano PQ, dunque AB sarà ancora perpendicolare ad AD; e siccome per ipotesi BC è una retta qualunque, ne segue che AB è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo piede nel piano MN ovvero è perpendicolare a questo piano. *C. D. D.*

35 *Corollario* I. Da questo teorema s'inferisce che per un punto B situato fuori di un piano MN non si può condurre che un solo piano parallelo al piano MN. Perocchè, se si potessero condurre due piani paralleli, essi sarebbero ambidue perpendicolari alla retta AB abbassata dal punto B perpendicolarmente sopra il piano MN; ed in tal caso per un punto di una retta si potrebbero innalzare due piani perpendicolari alla retta medesima, il che non può sussistere, (n. 35).

36. *Corollario* II. *Due piani paralleli ad un terzo piano sono paralleli fra loro*: perocchè se s'incontrassero, da un punto della loro comune intersezione si potrebbero condurre due piani paralleli ad un altro piano; il che è impossibile (n. 35).

PROPOSIZIONE XXII — *PROBLEMA.*

37. *Per un punto dato* B *condurre un piano parallelo ad un piano* MN (fig. 13).

Sol. Dal punto *B* si abbassi sopra il piano *MN* la perpendicolare *BA*, indi pel medesimo punto si conduca un piano *PQ* perpendicolare alla retta *BA* (n. 20), è manifesto che *PQ* sarà il piano richiesto (n 32) *C. D. F.*

PROPOSIZIONE XXIII — *TEOREMA.*

38. *Le rette parallele* AC , BD *comprese fra i piani paralleli* MN, PQ *sono uguali fra loro* (fig. 12.)

Dim. Infatti, essendo *AC* parallela a *BD*, esse saranno situate in un medesimo piano *ABDC*, di cui le intersezioni con i piani *MN* , *PQ* sono parallele (n. 33) La figura *ABDC* è dunque un parallelogrammo; e però si avrà *AC* = *BD*. *C. D. D.*

39. *Corollario.* Da questo teorema si deduce che

Due piani paralleli sono equidistanti fra loro.

Infatti, se due rette *AC, BD* sono perpendicolari ai piani (fig.12) *PQ*, *MN*, ciascuna di esse misurerà la più corta distanza di questi piani, perchè ogni obliqua sarebbe più lunga.

PROPOSIZIONE XXIV. — *TEOREMA.*

40. *Due rette comprese fra tre piani paralleli sono divise in parti proporzionali* (fig. 14.).

Dim. Sieno le rette *AB*, *CD* comprese fra tre piani paralleli *MN*, *PQ*, *RS*, si tiri la retta *AD* che incontri il piano *PQ*, nel punto *G*: indi si conducano le rette *AC*, *EG*, *GF*, *BD*.

Le intersezioni *EG* , *BD* dei piani paralleli *PQ* , *RS* col piano *ABD* essendo parallele (n. 33), le rette *AB*, *AD* saranno divise in parti proporzionali nei punti *E*, *G*; e però la ragione di *AE* ad *EB* sarà uguale a quella di *AG* a *GD*. Parimente essendo *AC* parallela a *GF*, sarà la ragione di *AG* a *GD* uguale a quella di *CF* a *FD* ; ma due ragioni uguali ad una terza sono uguali fra loro , dunque, *AE* : *EB* :: *CF* : *FD*. *C. D. D.*

CAPITOLO V.

DEGLI ANGOLI CHE LE RETTE FANNO TRA LORO NELLO SPAZIO, E DEGLI ANGOLI CHE FORMANO CON I PIANI.

41. Quando due rette si tagliano nello spazio, esse determinano un piano; per conseguenza tutto ciò che si è dimostrato nella geometria piana intorno agli angoli formati da due rette sopra un piano può applicarsi agli angoli formati da due rette che si tagliano nello spazio. Qui dunque esporremo ciò che riguarda gli angoli che non sono situati nello stesso piano.

PROPOSIZIONE XXV — TEOREMA.

42. *Se due angoli non situati nello stesso piano hanno i lati respettivamente paralleli e rivolti dalla stessa parte, essi saranno uguali, ed i loro piani saranno paralleli* (fig. 11).

Dim. Sieno CAD, EBF due angoli situati l'uno nel piano PQ, e l'altro nel piano MN; si faccia $AC = BE$, $AD = BF$, e si conducano le rette AB, CE, DF, CD, EF.

Essendo AC uguale e parallela a BE, la figura $ABEC$ sarà un paparallelogrammo; e però sarà AB uguale e parallela a CE. Parimente si dimostra che AB è uguale, e parallela a DF, dunque CE è uguale e parallela a DF, (n. 28), onde si avrà $CD = EF$, ed il triangolo CAD sarà uguale al triangolo EBF; e l'angolo $CAD = EBF$.

In secondo luogo, il piano CAD sarà parallelo al piano EBF. Infatti, se pel punto A si conduca un piano parallelo al piano BEF, questi due piani dovranno incontrare le tre rette parallele AB, CE, DF in modo che le parti di queste rette comprese fra essi sieno uguali (n. 38); ma AB, CE, DF sono uguali fra loro, dunque il piano parallelo al piano BEF deve confondersi col piano ACD. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXVI — TEOREMA.

43. *Se due rette non sono situate in un medesimo piano, saranno sempre situate in due piani paralleli* (fig. 15).

Dim. Sieno le due rette AB, CD non situate in un medesimo piano; si conduca pel punto E la retta EF parallela a CD, e pel punto C la retta GH parallela ad AB: il piano determinato dall'incontro delle rette BE, EF sarà parallelo al piano determinato dalle rette HC, CD (n. 42); per conseguenza le rette AB, CD saranno situate in piani paralleli. *C. D. D.*

44. *Scolio.* Quando due rette non sono situate in un medesimo piano, esse non formano angolo propriamente parlando, non ostante volendosi valutare la loro scambievole inclinazione si conduce per un punto di una di esse una retta parallela all'altra, e l'angolo formato dalle due rette misura l'inclinazione richiesta. Se poi una retta incontra un piano senza che sia a questo perpendicolare, essa può avvicinarsi più o meno al piano medesimo, ovvero essere più o meno inclinata a questo piano. La misura di siffatta inclinazione sarà data nel teorema qui appresso.

PROPOSIZIONE XXVII — TEOREMA.

45. *L'angolo* ADP *formato dalla obliqua* AD *e dalla retta che unisce il piede* D *della obliqua col piede* P *della perpendicolare* AP *al piano* MN, *misura la inclinazione della obliqua col piano medesimo* (fig. 16).

Dim. Perchè una siffatta misura possa essere legittima, convien dimostrare in primo luogo che l'angolo *ADP* non varia da qualunque punto della obliqua si abbassi la perpendicolare sul piano, ed in secondo luogo che l'angolo medesimo sia il più piccolo di tutti quelli che la obliqua accennata può fare con qualsivoglia altra retta *DC* condotta pel punto *D* nel piano *MN*.

1°. Sia *EF* un'altra perpendicolare abbassata da un punto qualunque *E* della obliqua *AD* sul piano *MN*. Le due rette *AP*, *EF* essendo perpendicolari ad un medesimo piano sono parallele fra loro, e determinano un piano, in cui si ritrova la retta *AD*, poichè una parte *AE* di questa retta si contiene nel detto piano; per conseguenza i punti *P*, *F*, *D* devono ancora trovarsi nel piano medesimo; ma questi stessi punti sono posti nel piano *MN*, dunque essi stanno nella intersezione comune dei due piani; vale a dire sono in linea retta. Laonde qualunque siasi la perpendicolare *EF* abbassata da un punto della obliqua *AD* sul piano *MN*, il suo piede *F* sarà sempre situato sopra la retta *PD*; per cui l'angolo *ADP* resterà sempre lo stesso.

2°. Si faccia $DC = DF$, e si conduca la retta *EC*; i due triangoli *EDC*, *EDF* hanno due lati respettivamente uguali a due lati, ma il terzo lato *EC* del primo è maggiore del terzo lato *EF* del secondo, perchè *EF* è perpendicolare, ed *EC* è obliqua al piano *MN*, dunque sarà l'angolo *EDC* maggiore dell'angolo *EDF*; e però l'angolo *ADP* sarà il più piccolo di tutti gli angoli che la obliqua *AD* può formare con qualsivoglia altra retta diversa da *DP* nel piano *MN*. *C. D. D.*

CAPITOLO VI.

DEGLI ANGOLI FORMATI DAI PIANI CHE S'INCONTRANO, OVVERO DEGLI ANGOLI DIEDRI.

46. Allorchè due piani *MD*, *CN* (fig. 17) s'incontrano, la quantità più o meno grande, di cui l'uno si allontana dall'altro, in quanto alla loro posizione, dicesi *angolo diedro*, cioè angolo a due facce. La comune intersezione *DC* chiamasi *spigolo*, e corrisponde al vertice dell'angolo formato da due linee rette in un piano, mentrechè le facce *MD*, *CN* corrispondono ai lati di questo medesimo angolo, avvertendo nondimeno che lo spigolo, e le facce dell'angolo diedro si devono considerare sempre come indefiniti.

47. Per indicare un angolo diedro si adoperano comunemente quattro lettere: così volendo indicare l'angolo formato dai piani *MD*, *CN* si dice: l'*angolo diedro MCDN*, avendo cura di mettere in mezzo le due lettere che servono a dinotare lo spigolo. La ragione di ciò è manifesta, dappoichè tre punti bastano a determinare la posizione di un piano, e quindi prendendo una lettera in ciascuna faccia, e due nello spigolo si vengono a determinare i piani che formano l'angolo diedro. Purtuttavolta è d'avvertirsi che può indicarsi

un angolo diedro nominando soltanto due lettere prese nello spigolo; e perciò in vece di dire: *l'angolo diedro MCDN*, si dirà semplicemente: *l'angolo diedro CD*, come alle volte s'indica un angolo piano rettilineo nominando la sola lettera del suo vertice.

48. Se per un punto qualunque *O* dello spigolo *DC* si conducano due perpendicolari *OB*, *OA* allo stesso spigolo, l'una nel piano *CN*, e l'altra nel piano *MD*, l'angolo *AOB* sarà un angolo piano rettilineo. All'angolo formato in tal guisa si dà il nome di *angolo piano corrispondente all'angolo diedro MCDN*; dappoichè quest'angolo è sempre lo stesso in tutti i punti dello spigolo. Infatti supponendo che le rette *MC*, *KC* sieno perpendicolari allo spigolo *CD*, l'angolo *MCK* sarà uguale all'angolo *AOB*, perchè hanno i lati respettivamente paralleli e rivolti dalla stessa parte (n° 24).

49. È manifesto che un angolo diedro risulta uguale ad un altro angolo diedro, allorchè sovrapponendo una faccia del primo ad una faccia del secondo, e lo spigolo allo spigolo, la rimanente faccia del primo combacia con la rimanente faccia del secondo, precisamente come avviene negli angoli piani rettilinei.

50. Un piano dicesi *perpendicolare* ad un altro allorchè forma con questo due angoli diedri adiacenti uguali fra loro. Ciascuno di questi angoli chiamasi *angolo diedro retto*. Si comprende che si debba intendere per angolo *diedro acuto*, *ed ottuso*.

PROPOSIZIONE XXVIII — *TEOREMA.*

51. *Se due angoli diedri* MCDN, mcdn *sono uguali*, *gli angoli piani corrispondenti*, AOB, aob *saranno ancora uguali* (fig. 17).

Dim. Si applichi l'angolo diedro *mcdn* sull'angolo diedro *MCDN* in modo che gli spigoli *cd*, *CD* coincidano, come pure le facce *md*, *MD*, e che il punto *o* cada sul punto *O*, il lato *oa* cadrà sul lato *OA*, perchè sono retti gli angoli *doa*, *DOA*. Parimente la faccia *cn* dovrà combaciare colla faccia *CN*, e però il lato *ob* caderà sul lato *OB*; dunque il piano *aob* combacerà col piano *AOB*, e l angolo *aob* sarà uguale all'angolo *AOB*. *C. D. D.*

52. *Scolio.* La reciproca di questa proposizione è così manifesta che non occorre dimostrarla.

PROPOSIZIONE XXIX — *TEOREMA.*

53. *Se un piano* BK *è perpendicolare ad un altro* MN, *ogni retta* AP *condotta perpendicolarmente alla intersezione comune* BC *nel piano* BK *sarà perpendicolare al piano* MN (fig. 18).

Dim. Nel piano *MN* si tiri *DE* perpendicolare a *BC*. Essendo per ipotesi uguali gli angoli diedri che il piano *BK* forma col piano *MN*, gli angoli piani corrispondenti *APD*, *APE* saranno ancora

uguali (n° 51). Quindi la retta AP sarà perpendicolare alle due rette BC, DE che passano pel suo piede P nel piano MN, e però sarà perpendicolare a questo medesimo piano. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXX — *TEOREMA*.

54. *Se una retta* AP *è perpendicolare ad un piano* MN, *ogni piano* BK *che passa per questa retta sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig. 18).

Dim. Pel punto P si conduca nel piano MN la retta DE perpendicolare alla intersezione comune BC dei due piani. Essendo per ipotesi AP perpendicolare al piano MN, gli angoli APD, APE saranno retti, e perciò uguali; ma questi sono gli angoli piani corrispondenti agli angoli diedri adiacenti che il piano BK forma col piano MN, dunque il piano BK è perpendicolare al piano MN (n°50). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXXI — *TEOREMA*.

55. *Se due piani* BG, DF, *che s'intersegano, sono perpendicolari ad un piano* MN, *la loro comune intersezione* AP *sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig. 19).

Dim. Imperocchè, se AP non è perpendicolare al piano MN, non potrà essere neppure perpendicolare alle due rette BC, DE che passano pel suo piede P nel piano MN; quindi nel piano BG si potrebbe condurre dal punto P una perpendicolere a BC, e nel piano DF una perpendicolare a DE. Ma ciascuna di queste perpendicolari dovrebb'essere perpendicolare al piano MN (n° 53); il che è assurdo (n° 14), dunque AP è perpendicolare al piano MN. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXXII — *TEOREMA*.

56. *Due angoli diedri qualunque stanno come i loro angoli piani corrispondenti* (fig. 17).

Dim. Sieno $MCDN$, $mcdn$ due angoli diedri qualunque, ed AOB aob i loro angoli piani corrispondenti.

Nel piano AOB si descriva col centro in O, e con un raggio ad arbitrio l'arco di circolo AB; lo stesso si faccia nel piano aob, prendendo per raggio $oa = OA$.

Ciò premesso, si supponga in primo luogo che gli archi AB, ab sieno commensurabili, e che la loro comune misura sia contenuta m volte nell'arco AB, e n volte nell'arco ab. Si divida l'arco AB in m parti uguali portando la comune misura sopra di esso, e l' arco ab in n parti uguali, indi si congiungano i punti di divisione col centro O, e col centro o, le rette congiungenti saranno raggi che divi-

deranno l'angolo *AOB* in *m* parti uguali, e l'angolo *aob* in *n* parti uguali. Or se per tutti questi raggi, e per gli spigoli *DC*, *dc* si facciano passare i piani che vengono determinati dall'incontro dei raggi con gli spigoli medesimi, l'angolo diedro *MCDN* sarà diviso in *m* angoli diedri uguali, e l'angolo diedro *mcdn* in *n* angoli diedri uguali, perchè i loro angoli piani corrispondenti sono uguali fra loro. Laonde risulta manifesto che gli angoli diedri proposti stanno come i loro angoli piani corrispondenti.

La stessa proporzione sussiste ancora quando gli archi *AB*, *ab* non sono commensurabili, e ciò si dimostra applicando a questo caso il ragionamento fatto per un caso analogo nella geometria piana (n° 205); dunque gli angoli diedri stanno come i loro angoli piani corrispondenti. *C. D. D.*

57. *Scolio*. Questa proposizione si enuncia ancora dicendo che: *Un angolo diedro qualunque ha per misura l'angolo piano corrispondente, ovvero l'arco di circolo che serve di misura all'angolo piano medesimo.*

Infatti, se si prenda per unità di misura degli angoli diedri *l'angolo diedro retto*, da quanto qui sopra si è dimostrato ne consegue che *un angolo diedro qualunque sta all'angolo diedro retto come l'angolo piano corrispondente al primo sta all'angolo piano corrispondente al secondo, cioè all'angolo retto.*

Quindi il rapporto di un angolo diedro qualunque alla sua unità di misura è uguale al rapporto dell'angolo piano corrispondente alla sua nnità; il che equivale a dire che un angolo diedro qualunque ha per misura l'angolo piano corrrispondente.

PROPOSIZIONE XXXIII — *TEOREMA*.

58. ***Se per un punto* B *dello spigolo* OE *di un angolo diedro* DOEF *si conducano le rette* BP, BQ *respettivamente perpendicolari alle facce* OD, OF, *l'angolo* PBQ *formato da queste perpendicolari sarà il supplemento dell'angolo* ABC *che misura l'angolo diedro*** (fig. 20).

Dim. La retta *BP* essendo perpendicolare al piano *OD*, sarà perpendicolare alla retta *OE*, che passa pel suo piede in questo piano. Parimente la retta *BQ* sarà perpendicolare ad *OE*. Da un'altra parte le rette *BA*, *BC* sono ancora perpendicolari ad *OE* per ipotesi, dunque le quattro rette *BA*, *BP*, *BQ*, *BC* sono situate nel piano che sarebbe prodotto dal rivolgimento dell'angolo retto *EBA* intorno al lato *EB* supposto immobile (n° 13); e perciò la somma de'quattro angoli, *ABC*, *ABP*, *PBQ*, *QBC* equivale a quattro angoli retti; ma gli angoli *ABP*, e *QBC* sono retti, dunque gli altri due presi insieme sono uguali a due retti, e per conseguenza l'angolo *PBQ* è il snpplemento dell'angolo *ABC* che misura l'angolo diedro proposto. *C. D. D.*

CAPITOLO VII.

DEGLI ANGOLI SOLIDI.

59. Se più piani si tagliano a due a due e si riuniscono tutti in un medesimo punto, lo spazio angolare da essi compreso dicesi *angolo solido*, o *angolo poliedro*.

60. Questa definizione è sufficiente a dare una idea chiara dell'angolo solido; dappoichè l'angolo sia piano, sia solido non può definirsi, rigorosamente parlando, essendo impossibile definire esattamente in che consiste la inclinazione di due rette chè s' incontrano in un medesimo piano senza formare una sola linea, o quella che risulta da tre, o più rette, le quali sono situate in piani differenti, e concorrono in un medesimo punto. Del resto, come già osservammo parlando dell'angolo piano, una definizione esatta dell' angolo solido non è necessaria: poichè si può conoscere l' uguaglianza di due angoli solidi sovrapponendo l'uno all altro, e ciò basta per fondare l'esatta teorica di detti angoli.

61. Il punto d'incontro dei piani che formano l'angolo solido chiamasi *vertice* dell'angolo stesso; e le intersezioni dei piani medesimi si dicono *spigoli*, o *costole* dell'angolo solido.

62. L'angolo solido prende il suo nome particolare dal numero dei piani che lo costituiscono: così (fig 21) l'angolo formato in S dai tre piani SAB, SAC, SBC si dice *angolo solido triedro*, o più semplicemente *angolo triedro*; quello formato da quattro piani chiamasi *angolo solido tetraedro*, o *angolo tetraedro*, ecc.

63. In qualunque angolo solido si distinguono gli *angoli piani rettilinei* formati dagli spigoli in ciascuna faccia, come sarebbero (fig. 21) gli angoli BSA, BSC, ASC, e gli angoli diedri delle facce o piani successivi che costituiscono l'angolo solido medesimo.

64. Per indicare un angolo solido si enuncia la lettera del vertice ponendo di seguito tutte le altre lettere respettivamente situate sopra i suoi spigoli: così si dice (fig. 21) *l'angolo solido SABC*. Talvolta si adopera la sola lettera del vertice, dicendosi *l'angolo solido S*.

65. L'angolo solido si dirà *convesso* quando il piano di ciascuna faccia prolungato non taglia l'angolo medesimo, vale a dire quando tutti i suoi angoli diedri sono *salienti*. Tale è l'angolo solido $SABC$ (fig. 21), in cui niuno spigolo è *rientrante*. E qui giova osservare che negli elementi di geometria si considerano i soli angoli solidi convessi.

PROPOSIZIONE XXXIV — *TEOREMA*.

66. *In ogni angolo triedro uno qualunque dei suoi tre angoli piani è minore della somma degli altri due* (fig. 21).

Dim. Sia *SABC* un angolo triedro, e sia *ASB* il maggiore dei tre angoli piani *ASB*, *ASC*, *CSB*. Nel piano *BSA* si faccia l'angolo *ASD* uguale all'angolo *ASC*, indi nel medesimo piano si conduca una retta *AB* che incontri le rette *SA*, *SD*, *SB*; si prenda *SC* = *SD* e si tirino le rette *AC*, *BC*. I triangoli *ASD*, *ASC* sono uguali, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali, onde si avrà *AD* = *AC*. Or nel triangolo *ABC* il lato *AB* è minore della somma dei lati *AC*, *CB*, dunque togliendo da una parte *AD*, e dall'altra la sua uguale *AC*, resterà *DB* minore di *BC*. Quindi i due triangoli *SBC*, *SBD* avranno il lato *SC* = *SD*, il lato *SB* comune, ed il terzo lato *BC* del primo maggiore del terzo lato *BD* del secondo, e però sarà l'angolo *BSC* maggiore dell'angolo *BSD*: aggiungendo da una parte l'angolo *ASD*, e dall'altra il suo uguale *ASC*, risulta l'angolo *ASB* minore della somma degli angoli *ASC*, *BSC*. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XXXV — *TEOREMA*.

67. *In ogni angolo solido la somma degli angoli piani è minore di quattro angoli retti* (fig. 22).

Dim. Sia *S* un angolo solido; si conduca un piano che incontri tutti i suoi spigoli: le intersezioni di questo piano colle facce dell'angolo solido formeranno il poligono *ABCDE*. Da un punto *O* preso dentro questo poligono si tirino le rette *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE*; vi saranno intorno al punto *O* tanti triangoli quanti sono quelli intorno al punto *S*; per conseguenza la somma di tutti gli angoli dei primi triangoli è uguale alla somma di tutti gli angoli dei secondi. Or nell'angolo triedro *A* formato dai tre piani *EAB*, *EAS*, *BAS*, l'angolo piano *EAB* è minore della somma degli altri due; e similmente l'angolo piano *ABC* è minore degli angoli *ABS*, *CBS*, e così di tutti gli angoli del poligono *ABCDE*, dunque la somma degli angoli che stanno alle basi dei triangoli aventi il vertice comune *O* è minore della somma degli angoli alle basi dei triangoli che hanno il vertice comune *S*. Laonde per compensazione la somma degli angoli formati intorno al punto *O* dev'essere maggiore della somma degli angoli fatti intorno al punto *S*. Ma la prima somma è uguale a quattro angoli retti, dunque la seconda è minore di quattro retti. *C. D. D.*

PROPOSIZONE XXXVI — *PROBLEMA*.

68. *Se pel vertice di un angolo triedro si conducano tre piani respettivamente perpendicolari ai suoi spigoli, si formerà un altro angolo triedro, in guisa che gli angoli piani del primo saranno i supplementi degli angoli diedri del secondo, e reciprocamente* (fig. 23).

Dim. Sia *SABD* un angolo triedro: pel punto *S* si conduca il pia-

no asb perpendicolare allo spigolo SD, il piano aSd perpendicolare allo spigolo SB, ed il piano bSd perpendicolare allo spigolo SA. Questi tre piani determineranno un secondo angolo triedro $Sabd$, in modo che gli angoli piani ASB, ASD, BSD saranno i supplementi degli angoli che misurano gli angoli diedri Sd, Sb, Sa.

Infatti, essendo per costruzione lo spigolo SD perpendicolare al piano aSb, sarà pure perpendicolare alle rette Sa, Sb che passano pel suo piede in questo piano. Parimente lo spigolo SB essendo perpendicolare al piano aSd, sarà ancora perpendicolare alle rette Sa, Sd che passano pel suo piede in questo piano. Quindi la retta Sa è perpendicolare a un tempo agli spigoli SD, SB, e perciò al piano DSB che contiene questi due spigoli. Nello stesso modo si dimostrerà che Sb è perpendicolare al piano ASD, e che Sd è perpendicolare al piano ASB. Dunque gli angoli triedri $SABD$, $Sabd$ son tali che gli spigoli dell' uno sono perpendicolari ai piani dell' altro, e viceversa.

Ciò premesso, da quanto si è dimostrato (n° 58) si desume che l'angolo ASB formato, dalle rette SA, SB rispettivamente perpendicolari ai piani bSd, aSd è supplemento dell'angolo diedro $aSab$ compreso da questi piani; e reciprocamente l'angolo $aSdb$ formato dalle rette Sa, Sb rispettivamente perpendicolari ai piani SDB, SAD sarà supplemento dell'angolo diedro $ASDB$. Lo stesso dicasi degli altri angoli piani, e degli angoli diedri corrispondenti nei due angoli solidi. *C. D. D.*

69. *Scolio.* La proprietà, di cui godono gli angoli triedri $SABD$, $Sabd$, ha fatto dare ad essi il nome di *angoli triedri supplementarj.*

PROPOSIZIONE XXXVII — *TEOREMA.*

70. *Se due angoli triedri hanno gli angoli piani respettivamente uguali, gli angoli diedri formati dai piani di questi angoli saranno essi pure uguali* (fig. 24).

Dim. Sieno S, s i due angoli triedri; e si supponga che gli angoli piani dinotati dalle stesse lettere sieno respettivamente uguali, cioè, $ASB = asb$, $ASC = asc$ $BSC = bsc$.

Si prendano negli spigoli a partire dai vertici S, s le parti uguali SA, SB, SC, sa, sb, sc. e si conducano le rette AB, BC, AC, ab, bc, ac, Per un punto E dello spigolo SB s'innalzino a questo spigolo nelle facce ASB, e CSB le perpendicolari EM, EN, l'angolo MEN formato da queste perpendicolari sarà la misura dell'angolo diedro $ASBC$ (n° 57). Or osservando che l'angolo SBA è acuto come angolo alla base del triangolo isoscele ASB, ne consegue che la obliqua BA deve incontrare la perpendicolare EM. Parimente la obliqua BC deve incontrare la perpendicolare EN.

Ciò premesso, si ripeta nel triedro s la costruzione precedente prendendo sullo spigolo sb una parte $se = SE$, l'angolo men sarà la misura dell'angolo diedro $asbc$, e sarà uguale all'angolo MEN.

Infatti, si conducano le rette MN, mn. Dalla ipotesi fatta qui sopra risultano uguali i triangoli ASB, asb, perciò sarà $AB=ab$. Parimente si dimostra che $BC=bc$, ed $AC=ac$; per conseguenza il triangolo ABC sarà uguale al triangolo abc. Da un'altra parte il triangolo MBE è uguale al triangolo mbe; poichè il lato $BE=be$, e gli angoli adiacenti a questi lati sono respettivamente uguali, onde sarà il lato $BM=bm$ ed $EM=em$. Similmente si dimostra che $BN=bn$, ed $EN=en$; e perciò il triangolo MNB è uguale al triangolo mnb, perchè l'angolo MBN compreso fra i lati BM, NB è uguale all'angolo mbn compreso fra i lati bm, bn in virtù della uguaglianza dei triangoli ABC, abc. Quindi sarà il lato $MN=mn$, ed il triangolo MNE risulterà equilatero al triangolo mne, e però infine sarà l'angolo MEN uguale all'angolo men. Dunque gli angoli diedri SB, sb sono uguali, e nello stesso modo si potrà dimostrare che l'angolo diedro $SA=sa$, e $SC=sc$. *C. D. D.*

71. *Scolio.* Nella dimostrazione precedente gli angoli piani dei due angoli solidi si sono considerati come similmente disposti, ma il teorema avrebbe luogo anche quando gli angoli piani accennati fossero disposti in ordine inverso, come negli angoli solidi $SABC$, $S'A'B'C'$, dove si ha l'angolo piano $ASC=A'S'C'$, $ASB=A'S'B'$, e $BSC=B'S'C'$. Infatti, se sopra gli spigoli si prendano le parti uguali SA, SB, SC, SA', SB', SC', indi si faccia $S'E'=SE$, e si ripeta sull'angolo solido S' la costruzione fatta nell'angolo solido S, si dimostrerà nello stesso modo che l'angolo $M'E'N'=MEN$.

PROPOSIZIONE XXXVIII — *TEOREMA.*

72. ***Due angoli triedri, composti di angoli piani rispettivamente uguali e similmente disposti, sono uguali fra loro*** (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, s sia l'angolo $ASC=asc$, $ASB=asb$, e $BSC=bsc$, sarà facile dimostrare che questi due angoli triedri sono uguali fra loro. Infatti, se l'angolo asc si sovrapponga al suo uguale ASC, l'angolo asb dovrà coincidere col suo uguale ASB, poichè l'angolo diedro sa è uguale all'angolo diedro SA. Quindi i due angoli solidi coincideranno, e perciò saranno uguali fra loro. *C. D. D.*

73. *Scolio.* Quando gli angoli piani di due angoli triedri S, S', sono uguali rispettivamente, ma disposti in ordine inverso, non si può dimostrare la loro uguaglianza col principio della sovrapposizione. Perocchè, se si fa coincidere l'angolo $A'S'C'$ col suo uguale ASC in modo che lo spigolo $S'A'$ cada sopra SA, e $S'C'$ sopra SC, lo spigolo SB si troverà sul davanti del piano comune ASC, mentrechè lo spigolo $S'B'$ sarà situato dietro lo stesso piano; e però i due angoli solidi non combaceranno, ma si troveranno situati come nella fig. 26.

Che se poi (fig. 24) per far cadere lo spigolo $S'B'$ davanti il piano ASC si sovrapponga lo spigolo $S'C'$ allo spigolo SA, e $S'A'$ a

SC, in tal caso neppure può succedere la coincidenza dei due angoli solidi; poichè l'angolo diedro $S'C'$ non è uguale all'angolo diedro SA, ed oltracciò l'angolo piano $C'S'B'$ non è uguale all'angolo ASB.

I due angoli solidi si troveranno in questo secondo caso disposti come gli angoli $SABC$, $SAB''C$ della figura.

Dunque in ogni caso non si può dimostrare la uguaglianza degli angoli triedri S, S' colla sovrapposizione, ma bisogna ricavarla dalla uguaglianza dei loro elementi costituenti, non essendovi alcuna ragione perchè essi debbano differire l'uno dall' altro. Infatti, sono composti degli stessi angoli piani, e degli stessi angoli diedri, e la loro differenza consiste in una semplice trasposizione di parti, essendo gli angoli piani dell'uno disposti in ordine inverso agli angoli piani dell'altro.

Legendre, che fu primo a fare queste importanti osservazioni, ha chiamati *uguali per simmetria*, o più semplicemente *simmetrici* gli angoli triedri, di cui è parola, perchè li considera come costituiti rispetto ad un medesimo piano l uno da una parte, e l' altro dalla parte opposta, siccome si vede nella fig. 26.

Da tutto ciò segue che due angoli triedri, ed in generale due angoli solidi, si potranno chiamare *simmetrici* quando sono composti di angoli piani rispettivamente uguali e disposti in ordine inverso.

Nelle figure piane non vi può essere uguaglianza per simmetria, poichè si può rovesciare una figura piana, e prendere indifferentemente il di sopra per il di sotto; il che non può farsi nelle figure solide.

PROPOSIZIONE XXXIX. — *PROBLEMA.*

74. *Costruire un angolo triedro simmetrico ad un angolo triedro dato* (fig. 25).

Sol. Sia $SABC$ l'angolo solido dato. Si prolunghino gli spigoli AS BS, CS al di là del vertice S; l'angolo $SA'B'C'$ sarà il simmetrico di $SABC$. Infatti, gli angoli piani dei due triedri sono uguali ciascuno a ciascuno come opposti al vertice, ma sono disposti in ordine inverso, come è facile dimostrare. Imperciocchè, se si applica lo spigolo SA' sopra SA, e SC' sopra SC, lo spigolo SB' non potrà cadere sopra lo spigolo SB, perchè rispetto al piano comune ASC, lo spigolo SB si troverà davanti questo piano, e lo spigolo SB' dietro il piano medesimo. Che se si applichi lo spigolo SC' sopra SA, e SA' sopra SC, lo spigolo SB' cadera davanti il piano ASC, ma non potrà coincidere collo spigolo SB, poichè l'angolo $C'SB'$ non è uguale all'angolo ASB, ma bensì al suo verticale CSB. Dunque i due triedri $SABC$, $SA'B'C'$ sono simmetrici. *C. D. F.*

75. *Scolio* I. Supponiamo che per un punto qualunque s si conducano le rette sa, sb, sc, respettivamente parallele agli spigoli SA, SB, SC di un angolo triedro $SABC$, e secondo la stessa direzione rispetto ai punti s, S, si formerà un secondo angolo triedro $sabc$ ugua-

le al primo; dappoichè gli angoli piani *asb*, *asc*, *bsc* sono uguali respettivamente agli angoli piani ASB, ASC, BSC, avendo i lati paralleli e rivolti dalla stessa parte (n° 32), e di più gli stessi angoli piani sono similmente disposti. Al contrario l'angolo solido *sabc* sarà simmetrico all'angolo solido $SA'B'C'$. Da ciò segue che se per un punto qualunque si conducano rette parallele agli spipoli di un angolo triedro, tutte rivolte dalla stessa parte degli spigoli dell'angolo triedro, si formerà un secondo angolo triedro uguale al primo; ma se poi le rette accennate sono tutte situate in direzione contraria, allora il secondo sarà simmetrico del primo.

76 *Scolio* II. Merita ancora di essere osservato che se un angolo triedro *sabc* situato comunque (fig. 26) si compone di angoli piani uguali rispettivamente a quelli dell'angolo triedro $SABC$, il primo potrà coincidere sia con $SABC$, sia col suo simmetrico $SAB'C$. Infatti, se si suppone che gli angoli piani dinotati dall'una e dall'altra parte colle stesse lettere siano uguali fra loro, e si ponga lo spigolo *sa* sopra SA, e lo spigolo *sc* sopra SC, ne risulta che essendo l'angolo diedro $csab = CSAB = CSAB'$, l'angolo piano *bsa* dovrà coincidere o coll'angolo piano BSA, o coll'angolo piano $B'SA$ secondo che lo spigolo *sb* caderà davanti al piano ASC, o dietro questo medesimo piano. Quindi l'angolo triedro *sabc* coinciderà sia coll'angolo triedro $SABC$, sia coll'angolo triedro $SAB'C$. Da ciò si deduce che con tre angoli piani dati si possono al più formare due angoli triedri, simmetrici l'uno dell'altro, o in altri termini che un angolo triedro non può avere che un solo simmetrico.

PROPOSIZIONE XL — *TEOREMA*.

77. *Due angoli triedri che hanno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno sono uguali, o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri $SABC$, *sabc* sia l'angolo diedro $SA = sa$, $SB = sb$, $SC = sc$; e si supponga che si sieno costruiti gli angoli triedri supplementarj (n° 68). Poichè nei due angoli solidi proposti gli angoli diedri sono uguali ciascuno a ciascuno, ne segue che gli angoli solidi supplementarj avranno gli angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e per conseguenza questi angoli solidi supplementarj, avranno ancora i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno. Ma gli angoli diedri degli angoli solidi supplementarj eguagliano ancora i corrispondenti angoli piani degli angoli solidi proposti; dunque gli angoli solidi proposti dovranno avere gli angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e però saranno o uguali, o simmetrici. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLI — *TEOREMA*.

78. *Due angoli triedri che hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, sono uguali o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, s sia l'angolo diedro $SB = sb$, e gli angoli piani ASB, CSB rispettivamente uguali agli angoli piani asb, csb, è manifesto che se questi angoli piani sono disposti nello stesso ordine, i due angoli solidi possono coincidere. Ma se gli angoli piani sono disposti in ordine inverso, allora l'uno degli angoli solidi potrà coincidere col simmetrico dell'altro, e perciò saranno simmetrici. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLII — *TEOREMA*.

79. *Due angoli triedri che hanno un angolo piano adiacente a due angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, sono uguali, o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, s sia l'angolo piano $ASC = asc$, l'angolo diedro $SA = sa$, e l'angolo diedro $SC = sc$. E' evidente che se gli angoli diedri accennati sono disposti nello stesso ordine, i due angoli solidi potranno coincidere, allorchè si sovrappongano l'uno all'altro. Ma se gli angoli diedri sono disposti in ordine inverso, allora uno degli angoli solidi proposti potrà coincidere col simmetrico dell'altro, e però saranno uguali nel primo caso, e simmetrici nel secondo. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLIII — *TEOREMA*.

80. *Due angoli poliedri sono uguali fra loro allorchè sono composti di un medesimo numero di angoli triedri respettivamente uguali, e disposti nello stesso ordine* (fig. 27).

Dim. Negli angoli poliedri S, s sia l'angolo triedro $SABC$ uguale all'angolo triedro $sabc$, e l'angolo $SBCD$ uguale all'angolo $sbcd$, sarà facile dimostrare che l'angolo S è uguale all'angolo s. Infatti, gli angoli triedri $SABC$, $sabc$ possono coincidere, se si pongano convenientemente l'uno sull'altro. Parimente può coincidere l'angolo triedro $SBCD$ coll'angolo $sbcd$, e lo stesso dovrà dirsi di tutti gli angoli triedri omologhi, che vi potessero essere; per conseguenza i due angoli poliedri proposti coincideranno, ovvero saranno uguali. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLIV — *TEOREMA*.

81. *Due angoli poliedri sono simmetrici fra loro quando sono composti di un medesimo numero di angoli triedri simmetrici, e disposti in ordine inverso*.

Dim. Imperocchè, questi angoli poliedri saranno composti di un medesimo numero di angoli piani respettivamente uguali, disposti in ordine inverso, e gli angoli diedri formati dai piani nei quali si

si trovano gli angoli uguali, saranno essi pure respettivamente uguali, perchè risultano dalla somma degli angoli diedri eguali appartenenti ai triedri parziali. *C. D. D.*

CAPITOLO VIII.

DEI SOLIDI TERMINATI DA SUPERFICIE PIANE.

82. Per formare un angolo solido vi vogliono almeno tre piani che si riunisrano in un solo e medesimo punto: ma per limitare lo spazio da per ogni dove vi bisogna un quarto piano che limiti lo spazio indefinito compreso fra le tre facce dell angolo accennato. Quindi la più semplice delle figure solide terminate da piani è il *tetraedro* o solido a quattro facce; viene in seguito il *pentaedro*, o solido a cinque facce, l'*esaedro* che ne ha sei, l'*ottaedro* che ne ha otto, il *dodecaedro*, dodici, l'*icosaedro*, venti. In generale si da il nome di *poliedro* ad ogni solido terminato da facce piane.

83. Le facce de'poliedri essendo poligoni, le intersezioni di questi poligoni si chiamano *lati*, *spigoli*, o *costole* del poliedro.

84 La *diagonale* di un poliedro è una linea retta che unisce due vertici non situati sulla medesima faccia.

85. Un poliedro si dice *convesso* quando la sua superficie non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. Di questa sola specie di poliedri si parla negli elementi, mettendo da parte quelli che hanno gli angoli solidi rientranti.

86. Dicesi *piramide* (fig. 22) un solido compreso fra più piani triangolari che partono da un medesimo punto S, e terminano ai differenti lati di un poligono $ABCDE$.

87. La piramide si può concepire come prodotta dal movimento di una linea retta indefinita, fissa in un punto S, ed obbligata a percorrere il perimetro di un poligono qualunque $ABCDE$.

88. Il punto S dicesi *vertice* della piramide, il poligono $ABCDE$ ne è la *base*, e la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della *base* ne è l'*altezza*. Finalmente il complesso dei tr angoli ASB, BSC, CSD, ecc: forma la *superficie convessa* o *laterale* della piramide.

89. La piramide dicesi *triangolare*, *quadrangolare*, ecc:, secondochè la base è un triangolo un quadrilatero, ecc.

90. Una piramide chiamasi *regolare* quando la sua base è un poligono regolare, e la sua altezza cade sul centro della base medesima. In questo caso l'altezza prende il nome di *asse* della piramide, e si appella *apotema* la perpendicolare abbassata dal vertice della piramide sopra un lato della sua base.

91 Sotto il nome di *piramide retta* intenderemo quella, in cui l'altezza non cade fuori della base. Chiameremo poi *piramide obliqua* quella, in cui l'altezza cade fuori della base.

92. Il *prisma* (fig. 29) è un solido compreso da più piani parallelogrammi terminati da una parte, e dall'altra da due poligoni u-

guali e paralleli, che si chiamano *basi* del prisma. Il complesso dei parallelogrammi accennati forma la *superficie convessa* o *laterale* del prisma.

93. Si può concepire il prisma come generato dal movimento di una retta AF che si mantiene parallela a se stessa e di costante lunghezza, mentre descrive colla sua estremità A il perimetro di un poligono qualunque $ABCDE$. Con questo medesimo movimento l'altra estremità F descrive il perimetro del poligono $FGHIK$ uguale e parallelo al poligono $ABCDE$.

94. L'*altezza* di un prisma è la distanza delle sue due basi, cioè la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

95. Il prisma prende il nome di *triangolare*, *quadrangolare*, ecc: secondochè le sue basi sono triangoli, quadrilateri, ecc.

96. Un prisma dicesi *retto* quando i lati della superficie convessa sono perpendicolari alle basi. In questo caso i lati medesimi sono uguali all'altezza, ed i parallelogrammi, che formano la superficie convessa, sono rettangoli. Per lo contrario il prisma è *obliquo* allorchè i lati sono obliqui alle basi; nel qual caso essi lati sono maggiori dell'altezza.

97. Dicesi *parallelepipedo* il prisma, in cui le basi sono due parallelogrammi. Quindi il parallelepipedo è un solido compreso da sei facce parallelogrammiche (fig. 30).

98. Il parallelepipedo essendo un prisma, potrà essere per conseguenza *retto* o *obliquo*. Nel parallelepipedo retto quando la base è un rettangolo, tutte le facce sono rettangolari; e perciò si chiama *parallelepipedo rettangolo*. Finalmente tra i parallelepipedi rettangoli si distingue il *cubo*, che è un solido compreso da sei quadrati uguali.

99. Nella teorica dei poliedri si distinguono particolarmente le piramidi, ed i prismi, perchè sopra questi solidi tutta quella teorica viene appoggiata.

PROPOSIZIONE XLV — TEOREMA.

100. *Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla base, l' altezza, ed i lati saranno divisi in parti proporzionali; e la sezione sarà un poligono simile alla base* (fig. 28).

Dim. Sia la piramide $SABCD$ tagliata da un piano $abcd$ parallelo alla base; sia SO l'altezza della piramide, e si conducano le rette ao, AO.

1°. Le intersezioni ab, AB dei piani $abcd$, $ABCD$ col piano SAB essendo parallele (n° 33), sarà il triangolo Sab simile al triangolo SAB. Nello stesso modo si dimostra che il triangolo Sbc è simile al triangolo SBC, il triangolo Scd al triangolo SCD, ecc.; per conseguenza la ragione di Sa: SA sarà uguale a quella di Sb: SB, di Sc: SC, ecc. Ma da un'altra parte la ragione di Sa: SA è uguale a

quella dell'altezza, *So* all'altezza *SO*, poichè *ao* è parallela ad *AO*, dunque i lati *SA*, *SB*, *SC*, ecc., e l'altezza *SO* della piramide sono divisi in parti proporzionali.

2.° Per la simiglianza degli stessi triangoli si ha *ab* : *AB* : : *Sb* : *SB* : : *bc* : *BC*, dunque *ab* : *AB* : : *bc* : *BC*, e così pure si dimostra che *bc* : *BC* : : *cd* : *CD*, ecc. Quindi i poligoni *abcd*, *ABCD* hanno i lati proporzionali; hanno di più gli angoli respettivamente uguali $a = A$, $b = B$, ecc., perchè sono compresi fra lati paralleli e rivolti nella stessa direzione, dunque il poligono *abcd* è simile al poligono *ABCD*. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLVI. — *TEOREMA.*

101. *Le basi di due piramidi, che hanno la medesima altezza, stanno fra loro come le sezioni fatte da piani condotti nelle due piramidi parallelamente ad esse basi, ed ad uguale distanza dai vertici* (fig. 28).

Dim. Sieno due piramidi *S*, e *T*, che abbiano le altezze uguali *SO*, *TQ*. Si faccia $Tq = So$, e pel punto *q* si conduca un piano parallelo alla base *MNP*, la sezione *mnp* sarà simile a questa base (n° 100). Parimente se pel punto *o* si conduca un piano parallelo alla base *ABCD*, la sezione *abcd* sarà simile a questa base. Or essendo simili i poligoni *ABCD*, *abcd*, le loro aje staranno come i quadrati dei lati omologhi *AB*, *ab*, ovvero come i quadrati delle altezze *SO*, *so* (n° 100). Nello stesso modo si dimostra che i poligoni *MNP*, *mnp* stanno come i quadrati delle altezze *TQ*, *Tq*, ovvero come i quadrati di *SO*, *so*, dunque in fine si avrà

ABCD : *MNP* : : *abcd*: *mnp*. *C. D. D.*

102. *Corollario.* Da ciò segue che se le basi *ABCD*, *MNP* delle due piramidi sono equivalenti, le sezioni *abcd*, *mnp* fatte ad uguale altezza nelle stesse piramidi saranno equivalenti, e reciprocamente.

PROPOSIZIONE XLVII — *TEOREMA.*

103. *Una piramide qualunque si può decomporre in piramidi triangolari* (fig. 26).

Dim. Sia, per esempio, la piramide quadrangolare *SABCD*. Si tiri la diagonale *AC* nella base della piramide, indi pel vertice *S* e per la diagonale medesima si faccia passare il piano *ASC*, è manifesto che questo piano dividerà la piramide proposta in due piramidi triangolari. Nello stesso modo, cioè tirando due diagonali nella base di una piramide pentagonale, si potrà divider questa in tre piramidi triangolari, e così in progresso. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XLVIII — *TEOREMA.*

104. *Qualunque sezione fatta in un prisma da un piano parallelo alla base è uguale a questa base.* (fig. 29).

Dim. Si tagli il prisma *abck* con un piano parallelo alla base, il poligono *lmnpq* che ne risulta sarà uguale al poligono *abcde*. Infatti, le rette *lm*, *ab* sono uguali come parallele comprese fra parallele, e così pure si dimostra che *mn* è uguale e parallela a *bc*, *np* a *cd*. ec. Quindi i due poligoni avranno i lati uguali rispettivamente, ed anche gli angoli eguali, perchè compresi fra lati paralleli, e rivolti dalla stessa parte; e perciò sarà il poligono *lmnpq* uguale al poligono *abcde*. *C. D. D.*

105. *Corollario*. In qualunque prisma le sezioni fatte da piani paralleli fra loro sono uguali; dappoichè una di queste sezioni si può considerare come base di un prisma cui è parallela l'altra sezione.

106. *Scolio*. Ogni prisma poligono si può sempre decomporre in prismi triangolari, i quali hanno la medesima altezza del prisma, e le basi sono i differenti triangoli *ABC*, *ACD*, *ADE*, ecc., nè quali si può decomporre la base *ABCDE* per mezzo delle diagonali *AC*, *AD*.

PROPOSIZIONE XLIX — *TEOREMA*.

107. *In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele, e gli angoli triedri opposti sono simmetrici* (fig. 30).

Dim. Sieno *ABCD*, *EGFH* le basi del parallelepipedo proposto, le quali (n° 97) sono parallelogrammi situati in piani paralleli. Or dico che due facce opposte qualunque *AE*, *DG* sono pure uguali e parallele. Perocchè, essendo *ABCD* un parallelogrammo, la retta *AB* è uguale e parallela a *CD*; parimente essendo *EBCG* un parallelogrammo, la retta *BE* è uguale e parallela a *CG*. Quindi gli angoli *ABE*, *DCG* hanno i lati paralleli e rivolti dalla stessa parte; perciò sono uguali, ed i loro piani sono paralleli (n° 42). Ma un parallelogrammo è determinato quando si conoscono due lati adiacenti e l'angolo da essi compreso, dunque il parallelogrammo *AE* è uguale a *DG*.

In secondo luogo, gli angoli triedri opposti, come *A*, e *G*, hanno gli spigoli paralleli ciascuno a ciascuno, ma non hanno la stessa direzione (n° 75). dunque sono simmetrici. *C. D. D.*

108. *Scolio*. Un prisma è determinato quando si conosce la base, e la retta generatrice; dunque un parallelepipedo sarà determinato allorchè si conoscerà uno dei suoi angoli triedri *B*, e le lunghezze de' lati *AB*, *BE*, *BC*.

PROPOSIZIONE L — *TEOREMA*.

109. *In ogni parallelepipedo le quattro diagonali si tagliano scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto* (fig. 31).

Dim. Per i due lati opposti *BF*, *DH* si faccia passare un piano; la sezione sarà il parallelogrammo *BFDH*: per conseguenza le diagonali *BH*, *FD* si taglieranno scambievolmente in due parti uguali

nel punto O. Or se per i lati opposti AD, FG si conduca un altro piano, la sezione $ADFG$ sarà pure un parallelogrammo, e la diagonale AG dividerà in due parti uguali la diagonale FD; e però la diagonale AG dovrà passare pel punto O. Si dimostrerà lo stesso per la diagonale EC; dunque le quattro diagonali del parallelepipedo si tagliano scambievolmeute in due parti uguali nel medesimo punto O. *C. D. D.*

110. *Scolio.* Il punto O si chiama *centro* del parallelepipedo.
È mauifesto che le rette tirate dal punto O a tutti i vertici del parallelepipedo, lo dividono in piramidi che hanno per vertice comune il punto O, e per basi le facce del parallelepipedo medesimo. E siccome ogni piramide si può decomporre in piramidi triangolari (n° 103), così ogni parallelepipedo si potrà decomporre in piramidi triangolari. Parimente prendendo un punto nell' interno di un poliedro, si potrebbe decomporlo in piramidi triangolari; ma essendo siffatta scomposizione molto importante, ne indicheremo un' altra nel teorema qui appresso.

PROPOSIZIONE LI — *TEOREMA.*

111. *Un poliedro convesso può sempre decomporsi in piramidi triangolari* (fig. 32).

Dim. Sieno SAB, $ABCD$, CDE tre facce consecutive di un poliedro. Se per uno dei vertici S si conducano delle linee rette a tutti gli altri, si determinerà una serie di piramidi $SABCD$, $SDCE$, ecc., che avranno per vertice comune il punto S, e per basi le differenti facce del poliedro, eccetto quelle che vanno a terminare al punto S. Il complesso di tutte queste piramidi formerà il poliedro medesimo: ma ogni piramide si può decomporre in piramidi triangolari, dunque ogni poliedro convesso può decomporsi in piramidi triangolari. *C. D. D.*

112. *Scolio.* Apparisce da questo teorema che siccome la teorica delle figure piane rettilinee si riduce a quella dei triangoli, così la teorica dei poliedri dovrà ridursi a quella delle piramidi triangolari. Nondimeno quest' ultima non potrebbe farsi rigorosamente, senza ricorrere ad alcune proprietà dei prismi, ed ecco perchè nella geometria solida si parla in modo speciale delle piramidi, e dei prismi, ed in un modo generale degli altri poliedri.

CAPITOLO IX.

DEI POLIEDRI UGUALI.

113 *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno tre facce respettivamente uguali, e similmente disposte* (fig. 24).

Dim. Sieno le due piramidi $SABC$, $sabc$, che abbiano le facce

SBA, *SBC*, *SCA* respettivamente uguali alle facce, *sba*, *sbc*, *sca*, e similmente disposte. Gli angoli tiedri S, e *s* saranno uguali, perchè sono composti di angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e disposti nello stesso ordine (n° 72), per conseguenza gli angoli diedri *SA*, *SB*, *SC* saranno rispettivamente uguali agli angoli diedri *sa*, *sb* *sc*. Quindi se si fanno coincidere gli angoli triedri accennati, risulterà manifesta la coincidenza delle due piramidi, che perciò saranno uguali. *C. D. D.*

114. *Corollario.* Da questo teorema si deduce evidentemente che due piramidi triangolari sono uguali allorchè hanno tutti i lati rispettivamente uguali e similmente disposti.

PROPOSIZIONE LIII — *TEOREMA*.

115. ***Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno un angolo diedro uguale, compreso fra due facce rispettivamente uguali e similmente disposte*** (fig. 24).

Dim. Sieno *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari, nelle quali sia l'angolo diedro *SB* uguale all'angolo diedro *sb*, e le facce *SBA*, *SBC* rispettivamente uguali alle facce *sba*, *sbc*, e similmente disposte. È chiaro che se si ponga la faccia *sba* sopra la sua uguale *SBA*, e l'angolo diedro *sb* sopra *SB*, la faccia *sbc* combacerà con la faccia *SBC*, e però risulta manifesta la uguaglianza delle due piramidi. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LIV — *TEOREMA*.

116. *Due piramidi triangolari sono uguali, quando hanno una faccia uguale adiacente a tre angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti* (fig. 24).

Dim. Sieno *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari, che abbiano le facce *ABC*, *abc* uguali fra loro, come pure gli angoli diedri adiacenti a queste facce. Se si fanno combaciare le facce *ABC*, *abc*, la faccia *asb* si troverà nel piano della faccia *ASB*, ed il punto *s* caderà in un punto di questo piano. Parimente, la faccia *asc* si troverà nel piano della faccia *ASC*, ed il punto *s* caderà in un punto di questo piano. Nello stesso modo ancora si dimostrerà che la faccia *bsc* sarà situata nel piano della faccia *BSC*, e che il punto *s* caderà in un punto di questo piano; per conseguenza il punto *s* dovendosi trovare a un tempo nei tre piani *ASB*, *ASC*, *BSC*, si troverà nel punto *s* del loro incontro. Quindi le due piramidi triangolari coincideranno, e perciò saranno uguali. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LV — *TEOREMA*.

117. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno una costola uguale, e tutti i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti* (fig. 24).

Dim. Sieno *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari, nelle quali sieno uguali gli spigoli *SA*, *sa*, come pure tutti gli angoli diedri similmente situati. Gli angoli triedri *S*, *s* sono uguali, poichè hanno i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti (n° 77); per conseguenza i loro angoli piani *ASB*, *asb* sono eguali, come pure gli angoli *ASC*, *asc*. Per la stessa ragione sono uguali gli angoli triedri *A*, *a*, ed in conseguenza gli angoli *SAB*, *sab*, e gli angoli *SAC*, *sac*. Quindi i triangoli *ASB*, *asb* sono uguali, perchè hanno il lato *SA* uguale al lato *sa*, e sono uguali gli angoli adiacenti a questi lati ciascuno a ciascuno: lo stesso si verifica per i due triangoli *ASC*, *asc*. Dunque le due piramidi proposte hanno un angolo diedro uguale *BASC*=*basc* compreso fra due facce uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte; perciò queste due piramidi sono uguali (n° 115) *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LVI — *TEOREMA*.

118. *Due piramidi sono uguali quando hanno basi uguali, e due facce contigue alla prima di queste. basi uguali rispettivamente a due facce contigue alla seconda, e similmente disposte* (fig. 27).

Dim. Sieno *SABDC*, *sabcd* due piramidi, che abbiano le basi uguali *ABCD*, *abcd* e le facce contigue *ASB*, *BSD* rispettivamente uguali alle facce contigue *asb*, *bsd*, e similmente disposte. Si tirino le diagonali *AD*, *ad*, le due piramidi saranno decomposte in piramidi triangolari dai piani *SAD*, *sad*. Or in virtù della uguaglianza dei poligoni *ABCD*, *abcd*, saranno uguali i triangoli *ABD*, *abd*; per conseguenza le piramidi triangolari *SABD*, *sabd* avranno tre facce uguali ciascuna a ciascuna e similmente situate, onde saranno uguali fra loro (n° 113). Quindi se si fanno coincidere i poligoni *ABCD*, *abcd*, i triangoli *ABD*, *abd* coincideranno, come pure le piramidi triangolari uguali *SABD*, *sabd*; e però le due piramidi avranno tutti i loro vertici comuni, e coincideranno in tutta la loro estensione. Dunque queste piramidi sono uguali. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LVII — *TEOREMA*.

119. *Due prismi sono uguali, quando hanno una base e due facce contique uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 29).

Dim. Nei prismi *AK*, *ak* sia la base *ABCDE* uguale alla base *abcde*, la faccia *ABGF* uguale alla faccia *abgf*, e la faccia *BCHG* uguale alla faccia *bchg*. Gli angoli triedri *B*, e *b* sono uguali, poichè hanno gli angoli piani rispettivamente uguali, e similmente disposti; perciò posta la base *abcde* sopra la base *ABCDE*, lo spigolo *bg* coinciderà collo spigolo *BG*, la faccia *bchg* colla faccia *BCHG*, e la faccia *abgf* colla faccia *ABGF*. Quindi i punti *f*, *g*, *h* caderanno rispet-

tivamente su i punti F, G, H; ma per tre punti non in linea retta può passare un solo piano; dunque il poligono $fghik$ combacerà col suo uguale $FGHIK$, e gli spigoli id, ke coincideranno essi pure cogli spigoli ID, KE. Laonde i due prismi sono uguali. *C. D. D.*

120. *Corollario. Due prismi retti sono uguali quando hanno basi uguali, ed uguali altezze;* dappoichè in tal caso le loro facce rettangolari sono uguali a due a due, avendo uguali basi, ed uguali altezze.

PROPOSIZIONE LVIII — *TEOREMA.*

121. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti delle due basi di un parallelepipedo retto, lo divide in due prismi triangolari uguali fra loro* (fig. 30).

Dim. Sia il parallepipedo retto AG, e sieno $ABCD$, $EGFH$ le sue basi. Essendo lo spigolo EB uguale e parallelo allo spigolo FD (n° 97), se si conducano le diagonali BD, EF delle due basi, la figura $EBDF$ sarà un rettangolo; poichè per ipotesi il parallelepipedo AG è retto, e per conseguenza gli spigoli EB, FD sono perpendicolari alle basi. Quindi i due solidi $ABDEFH$, e $BCDEGF$ sono prismi triangolari retti che hanno uguali basi, ed uguali altezze, e perciò sono uguali fra loro (n° 120). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LIX — *TEOREMA.*

122. *Due poliedri S, s sono uguali, allorchè possono decomporsi in un medesimo numero di piramidi uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 32).

Dim. Infatti, se si fanno coincidere due di queste piramidi $SABC$, $sabc$, supposte uguali, le piramidi vicine coincideranno con una faccia; e siccome esse sono uguali per ipotesi, e similmente disposte, così coincideranno in tutta la loro estensione. Lo stesso avrà luogo progressivamente per tutte le piramidi prese a due a due, e però i poliedri medesimi coincideranno. *C. D. D.*

123. *Scolio.* La reciproca di questa proposizione è evidente, cioè che due poliedri uguali possono decomporsi in un medesimo numero di piramidi uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte. *C. D. D.*

PROPOSIZONE LX — *TEOREMA.*

124. *Due poliedri sono uguali quando hanno le facce rispettivamente uguali e similmente disposte, e ciascun angolo diedro di due facce contigue in uno di essi uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altro* (fig. 32).

Dim. Imperocchè, se nei due poliedri si considerano due piramidi triangolari omologhe esterne $SABC$, $sabc$, si vedrà che esse

sono uguali, poichè hanno un angolo diedro uguale compreso fra facce rispettivamente uguali, e similmente situate. Quindi se dai due poliedri si tolgano queste piramidi, si avranno altri due poliedri, nei quali le nuove facce saranno rispettivamente uguali, e saranno pure rispettivamente uguali i nuovi angoli diedri. Dunque si potrà operare sopra questi nuovi poliedri come sopra i precedenti, e così progredendo si potranno decomporre i due poliedri in un medesimo numero di piramidi triangolari uguali e similmente disposte; e però questi poliedri saranno uguali. *C. D. D.*

125. *Scolio.* La reciproca della proposizione precedente è manifesta, cioè che due poliedri uguali hanno le facce omologhe rispettivamente uguali e similmente disposte, e ciascun angolo diedro di due facce contigue in uno di questi poliedri uguale all' angolo diedro delle facce omologhe nell'altro (*).

CAPITOLO X.

DEI POLIEDRI EQUIVALENTI.

126. Lo spazio compreso dalla superficie di un solido dicesi *solidità* o *volume*.

127. Due solidi si chiamano *equivalenti* quando hanno il medesimo volume, ma non possono coincidere.

128. Misurare il volume di un solido significa determinare il suo rapporto col volume di un altro solido di nota grandezza che si prende per *unita di volume*.

129. Per unità di volume si è prescelto quello di un cubo, cui si dà per spigolo l'unità di lunghezza. Così se l'unità di lunghezza è il palmo, l'unità di volume sarà un cubo, il cui spigolo è un palmo, e che perciò si chiama *palmo cubico*. Se l'unità di lunghezza è la canna, l'unità di volume sarà un cubo, il cui spigolo è una canna, e si chiama *canna cubica*, e così in progresso.

230. Sotto il nome di *dimensioni di un parallelepipedo rettangolo* s'intendono le tre rette che rappresentano la sua altezza, e le due dimensioni della sua base, cioè la lunghezza, e la larghezza.

131. Alle denominazioni *larghezza*, ed *altezza* si sostituiscono talvolta quelle di *grossezza*, e di *profondità*. Così si dice, per esempio, la lunghezza e l'altezza di un edifizio; la lunghezza, l'altezza, e la grossezza di un muro; la lunghezza, la larghezza, e la grossezza di una tavola; la lunghezza, la larghezza, e la profondità di un fosso, ecc.

(*) Euclide ha messo come definizione che due poliedri sono uguali, quando sono compresi da un medesimo numero di piani uguali ciascuno a ciascuno. Lungi dall'essere una definizione è questo un teorema difficilissimo a dimostrarsi, e fortunatamente non è necessario negli elementi. La dimostrazione fattane dal celebre geometra Cauchy potrà leggersi nelle note alla geometria di Legendre.

132. Si è dato il nome di *dimensioni* alla lunghezza, larghezza, ed altezza di un parallelepipedo rettangolo, perchè esse misurano l'estensione di questo solido nelle sue tre direzioni principali. Infatti, l'estensione di un parallelepipedo rettangolo è uniforme nella direzione di ciascuna delle sue tre dimensioni; dappoichè essa è limitata da due piani paralleli, ambidue perpendicolari allo spigolo che misura questa dimensione. Siffatta disposizione particolare al parallelepipedo rettangolo non esiste più negli altri solidi; non pertanto si adopera ancora la parola *dimensione* per indicare le tre *direzioni* principali della loro estensione, abbenchè la maggior parte di questi solidi non abbia, propriamente parlando, nè lunghezza, nè larghezza, nè altezza assegnabili effettivamente. Si può ora comprendere perchè siasi prescelto il cubo per unità di volume dei solidi.

PROPOSIZIONE LXI — *TEOREMA.*

133. *Il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni* (fig. 33).

Dim. Sia *BM* il parallelepipedo rettangolo proposto. Supponiamo per fissare le idee, che lo spigolo *AB* contenga 6 volte l'unità di lunghezza *ab*, e che gli spigoli *AD*, ed *AC* la contengano rispettivamente 4 volte, e 7 volte.

Si divida *AB* in 6 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano altrettanti piani perpendicolari ad *AB*: parimente si divida *AD* in 4 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano i piani perpendicolari ad *AD*: finalmente si divide *AC* in 7 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano i piani perpendicolari ad *AC*.

È manifesto che con questa costruzione il parallelepipedo *BM* si troverà decomposto in piccoli parallelepipedi rettangoli, che avranno tutti le loro tre dimensioni uguali alla unità di lunghezza *ab*, perchè due piani perpendicolari ad una medesima retta sono paralleli fra loro (nº 25). Dunque questi piccoli parallelepipedi sono cubi, dei quali ciascuno ha per spigolo l'unità di lunghezza, e perciò è una unità di volume. Or è evidente che il numero di tutti questi cubi corrisponde al prodotto dei numeri 4, 6, e 7, cioè 168; dunque se gli spigoli *AB*, *AD*, *AC* sono commensurabili coll'unità di lunghezza *ab*, il parallelepipedo rettangolo *BM* avrà per misura il prodotto delle sue tre dimensioni.

Suppongasi in secondo luogo che due spigoli soltanto *AB*, ed *AD*, sieno commensurabili coll'unità di lunghezza *ab*, dico che anche in questo caso il volume del parallelepipedo *BM* sarà espresso dal prodotto dei tre spigoli *AB*, *AD*, *AC*. Infatti, si supponga, se è possibile, che il volume accennato sia espresso dal prodotto $AB \times AD$ per un terzo spigolo *AO* minore di *AC*. Si prenda una parte aliquota di *ab* che sia minore di *OC*, e si tolga dallo spigolo *AC* tante volte quante si può, si avrà un residuo *CL* minore di *OC*; pel punto *L* si conduca un piano

parallelo alla base *ABD* del parallelepipedo proposto. Il parallelepipedo *BN* che ne risulta avrà per misura il prodotto dei tre spigoli *AB*, *AD*, *AL*, poichè questi spigoli sono commensurabili coll'unità di lunghezza. Ma per ipotesi il prodotto degli spigoli *AB*, *AD*, *AO* è la misura del parallelepipedo *BM*; dunque il parallelepipedo *BN* dovrebbe essere maggiore del parallelepipedo *BM*; il che è assurdo. Nello stesso modo si dimostrerebbe che il volume del parallelepipedo *BM* non può essere espresso dal prodotto $AB \times AD$ per un terzo spigolo maggiore di *AC*.

In terzo luogo sia il solo spigolo *AD* commensurabile con *ab*, e si supponga che il volume del parallelepipedo *BM* sia espresso da $AB \times AD$ per un terzo spigolo minore di *AC*. Si faccia la costruzione sopraccennata, e sarà il parallelepipedo *BN* espresso dal prodotto dei tre spigoli *AB*, *AD*, *AL*, poichè *AD*, ed *AL* sono commensurabili coll'unità di lunghezza. Laonde il parallelepipedo *BN* sarebbe maggiore del parallelepipedo *BM*; il che non può sussistere.

Finalmente se tutti e tre gli spigoli sono incommensurabili coll'unità di lunghezza, si farà la stessa costruzione adoperata nei due casi precedenti, e si dimostrerà nello stesso modo che il parallelepipedo *BN*, che in questo caso avrebbe un solo spigolo commensurabile *AL*, sarebbe maggiore di *BM*. Dunque in ogni caso il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni. *C. D. D.*

134. *Scolio.* Quando si dice che il parallelepipedo rettangolo *BM* ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni, si fa uso di una espressione abbreviata, colla quale si vuole intendere che il parallelepipedo proposto *BM* sta al cubo *bm*, che è l'unità di volume, come il numero astratto risultante dal prodotto delle tre linee *AB*, *AD*, *AC* all unità di lunghezza *ab*. Or siccome il prodotto di *AB* moltiplicata per *AD* rappresenta l'aja del rettangolo *ABD*, così se si prenda questo rettangolo per base del parallelepipedo, lo spigolo *AC* ne sarà l' altezza; e però si può dire che: *il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Parlando a rigore, è impossibile moltiplicare una superficie per una linea, ma questo modo di dire è una espressione abbreviata, colla quale si dee intendere che il numero astratto delle unità quadrate della base del parallelepipedo moltiplicato pel numero astratto delle unità lineare dell' altezza dà per prodotto un altro numero pure astratto, il quale esprime il rapporto del parallelepipedo proposto al cubo, ch' è l' unità di volume.

135. *Corollario* I. Se il parallelepipedo rettangolo è un cubo, se ne avrà la misura prendendo il numero delle unità di lunghezza contenute in uno dei suoi spigoli, e formando un prodotto in cui questo numero entri tre volte come fattore. Così, se lo spigolo del cubo proposto contiene 2 unità di lunghezza, questo cubo conterrà 8 unità di volume. Ed ecco perchè in aritmetica si è dato il nome di cubo al prodotto di tre fattori uguali.

136. *Corollario* II. Due parallelepipedi rettangoli che hanno ba-

si equivalenti, ed altezze uguali, sono equivalenti, dappoichè hanno la stessa misura.

137. *Corollario* III. Due parallelepipedi rettangoli che hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, sono equivalenti.

138. *Corollario* IV. Due paralleledipedi rettangoli che hanno la stessa altezza, stanno fra loro come le basi. Viceversa, se hanno uguali basi, o basi equivalenti, stanno fra loro come le altezze.

139. *Corollario* V. Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro tre dimensioni, ovvero come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze, o finalmente in ragione composta dalla ragione delle basi, e dalla ragione delle altezze.

PROPOSIZIONE LXII — *TEOREMA*.

140. ***Ogni parallelepipedo retto e equivalente ad un parallelepipedo rettangolo che ha la stessa altezza, ed una base equivalente.*** (fig. 34).

Dim. Sia *AL* un parallelepipedo retto, di cui la base è il parallelogrammo *ABCD*. Dai punti *A*, e *B* si abbassino sopra *DC* le perpendicolari *AO*, *BN*, indi dai punti *O*, e *C* s'innalzino sopra *DC* nel piano *MDCL* le perpendicolari *OQ* , *NP*, e finalmente si tirino le rette *IQ*, *KP*. Con questa costruzione si avrà il solido *AP*, che sarà un parallelepipedo rettangolo equivaleute al parallelepipedo proposto. Infatti, la base *ABNO* è un rettangolo equivalente al parallelogrammo *ABCD*; parimente la base superiore *IKPQ* è un rettangolo equivalente al parallelogrammo *IKLM*. Di più, le facce laterali del solido *AP* sono pure rettangolari; dappoichè essendo *MD* perpendicolare al piano della base *ABCD* del parallelepipedo retto , le linee *QO*, *NP* parallele a *MD* saranno pure perpendicolari al piano medesimo (n° 24) ; ma gli spigoli *IA*, *KB* sono essi ancora perpendicolari al piano accennato, dunque il solido *AP* è un parallelepipedo rettangolo. Or da un' altra parte i due prismi triangolari retti *AM*, *BL* sono uguali, poichè le basi *ADO*, *BCN* sono uguali, come pure le altez. e *DM*, *NP* (n° 120): dunque se a questi due prismi si aggiunge di comune il solido *ABCOIKLQ*. il parallelepipedo retto *AL* risulterà equivalente al parallelepipedo rettangolo *AP*. *C.D.D.*

141. ***Corollario*** I. Dalla proposizione precedente si deduce che ***Il parallelepipedo retto ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.***

142. *Corollario* II. Due parallelepipedi retti che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti.

143. *Corollario* III. Il prisma triangolare retto *BCDF* (fig. 30) ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.

Infatti, il prisma triangolare retto *BCDF* è metà (n° 121) del parallelepipedo retto *CH* che ha una base doppia e la stessa altezza.

144. *Corollario* IV. Dal corollario precedente apparisce che ***Due prismi triangolari retti sono equivalenti, quando hanno basi equivalenti, ed altezze uguali.***

PROPOSIZIONE LXIII — TEOREMA.

145. *Due piramidi triangolari rette che hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, sono equivalenti.* (fig. 35).

Dim. Sieno *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari rette. Si supponga che le basi *ABC*, *abc* sieno situate in un medesimo piano, e che l' altezza della prima piramide si confonda collo spigolo *SA*, e l'altezza della seconda cada sul lato *ac* della base *abc*; poichè se cadesse dentro di questa base, la dimostrazione seguente resterebbe sempre la stessa.

Si chiamino *P*, e *p* i volumi delle due piramidi: se queste piramidi non sono equivalenti, sia *sabc* la più piccola. Sarà sempre possibile, prendendo un' altezza conveniente *Ax*, costruire un prisma retto avente per base il triangolo *ABC*, di cui il volume sia uguale alla differenza *P—p* dei volumi delle due piramidi proposte.

Si divida l' altezza *SA* in parti uguali minori di *Ax*, e per i punti di divisione *D*, *G*, *K*, ecc. si conducano altrettanti piani paralleli al piano delle basi; le sezioni fatte da ciascuno di questi piani nelle due piramidi saranno equivalenti (n° 142), onde si avrà *DEF*=*def*, *GHI*=*ghi*, ecc.

Ciò premesso, sopra i triangoli *ABC*, *DEF*, *GHI*, ecc. presi per basi si costruiscano i prismi retti esterni *ABCN*, *DEFO*, *GHIP*, ecc., che abbiano per altezze le parti *AD*, *DG*, *GK*, ecc. dell' altezza *SA*. Parimente sopra i triangoli *def*, *ghi*, *klm*, ecc. presi per basi si costruiscano nella seconda piramide i prismi retti interni *defo*, *ghip*; ec. dei quali le altezze saranno uguali alle altezze *AD*, *DG*, *GK*, ec. dei prismi esterni appartenenti alla prima piramide. Quindi tutti i prismi fin qui mentovati avranno per altezza comune *AD*.

La somma de' prismi esterni della piramide *SABC* è maggiore del volume di questa piramide; al contrario la somma de' prismi interni della piramide *sabc* è minore del volume di questa piramide; dunque per queste due ragioni, se si chiami *S* la somma de' prismi esterni, e *s* quella degli interni, dovrà essere la differenza *S—s* maggiore della differenza *P—p*.

Or a partire dalle basi *ABC*, *abc*, il secondo prisma esterno *DEFO* è equivalente al primo prisma interno defo (n° 142), poichè hanno basi equivalenti ed altezze uguali; sono equivalenti per la stessa ragione il terzo prisma esterno *GHIP* ed il secondo interno *ghip*, il quarto esterno ed il terzo interno, e così in progresso fino all' ultimo degli uni e degli altri. Dunque tutti i prismi esterni della piramide *SABC*, eccetto il primo *ABCN*, hanno i loro equivalenti ne' prismi interni della piramide *sabc*; per conseguenza la differenza *S—s* sarà uguale al prisma accennato *ABCN*. Ma per costruzione la differenza *P—p* delle due piramidi è maggiore del prisma *ABCN*, dunque la differenza *S—s* dei prismi sarà minore della differenza *P—p* delle piramidi; il che è assurdo, perchè più sopra si è dimostrata maggiore: dunque la piramide *SABC* non può essere

maggiore della piramide *sabc*. Nello stesso modo si dimostrerà che non può essere minore, poichè basterà costruire i prismi esterni nella piramide *sabc*, e gl' interni nella piramide *SABC*; perciò le due piramidi sono equivalenti. *C. D. D.* (*)

PROPOSIZIONE LXIV — *PROBLEMA.*

146. *Ogni piramide triangolare obliqua è equivalente ad una piramide triangolare retta che ha la medesima base, e la medesima altezza* (fig. 27).

Dim. Sia *SD* l' altezza della piramide obliqua *SABC*. Si tirino le rette *BD, AD, CD*; indi si costruisca un triangolo *abc* uguale al triangolo *ABC*, e sopra *bc* si costruisca il triangolo *bcd* uguale al triangolo *BCD*, sarà il quadrilatero *abcd* uguale al quadrilatero *ABCD*. Ciò premesso, s'innalzi dal punto *o* sul piano *abcd* la perpendicolare $os = DS$, e si conducano le rette *sa, sb, sc, sd, ad.*

La piramide triangolare retta *SABD* è equivalente alla piramide triangolare retta *sabd*; dappoichè la base *ABD* della prima è uguale alla base *abd* della seconda, e l' altezza *SD* è uguale all' altezza *so* (n° 145). Parimente si dimostra che la piramide triangolare *SADC* è equivalente alla piramide triangolare *sadc*: per conseguenza la piramide quadrangolare *SABDC* è equivalente alla piramide quadrangolare *sabdc*. Ma la piramide triangolare retta *SBDC* è equivalente alla piramide triangolare retta *sbdc*: dunque se dalle due piramidi quadrangolari si tolgano queste due piramidi triangolari, resterà la piramide triangolare obliqua *SABC* equivalente alla piramide triangolare retta *sabc*. *C. D. D.*

147. *Corollario.* Dal teorema precedente si deduce evidentemente che: *due piramidi triangolari qualunque che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti.*

PROPOSIZIONE LXV — *TEOREMA.*

148. *Ogni piramide triangolare è equivalente alla terza parte del prisma triangolare della medesima base, e della medesima altezza* (fig. 36).

Dim. Sia *ABCD* una piramide triangolare. Per i punti *B*, e *C*. si conducano le rette *BE, CF* uguali e parallele ad *AD* (n° 27); indi si congiungano i punti *E, D, F* colle rette *ED, DF, FE*: con questa costruzione si formerà il prisma triangolare *AE*, il quale avrà la medesima base *ABC*, e la medesima altezza della piramide proposta.

(*) La condizione particolare della piramide *ABCS*, di avere per costola la sua altezza *AS*, nulla toglie alla generalità della dimostrazione. Infatti, se le due piramidi rette fossero comunque, ciascuna di esse sarebbe equivalente ad una terza piramide avente eguale altezza, e base equivalente; e condizionata come la *ABCS*.

Ciò premesso, per i tre punti C, D, E si faccia passare un piano, questo dividerà la piramide quadrangolare $EBCFD$ in due piramidi triangolari equivalenti $EBCD$. $ECFD$, poichè hanno basi uguali, e la stessa altezza, cioè la perpendicolare abbassata dal vertice comune D sul piano $EBCF$. Or considerando la piramide $ECFD$ come se avesse per base il triangolo EDF. e per vertice il punto C, ne segue che le due piramidi $ECDF$, $ABCD$ avranno basi uguali, ed altezze uguali; perciò queste due piramidi saranno uguali, ed il prisma triangolare sarà decomposto nelle tre piramidi triangolari equivalenti fra loro $ABCD$, $EBCD$, $ECFD$. Laonde la piramide proposta $ABCD$ sarà la terza parte del prisma AE. C. D. D.

149. *Corollorio* I. *Due prismi triangolari che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti, perchè le piramidi loro terze parti sono equivalenti* (n.° 145).

150. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che un prisma triangolare obliquo è equivalente ad un prisma triangolare retto di base equivalente e della stessa altezza, ma il prisma triangolare retto ha per misura il prodotto della base per l'altezza (n° 143); per conseguenza: *ogni prisma triangolare ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

151. *Corollario* III. Ma la piramide triangolare è la terza parte del prisma triagolare della stessa base, e della stessa altezza, dunque

Ogni piramide triangolare ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.

152. *Corollario* IV Potendosi ogni prisma poligono decomporre in prismi triangolari dellla stessa altezza (n° 106): ed ogni piramide poligona in piramidi triangolari della stessa altezza (n° 103) ne consegue che

1°. *Ogni prisma ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

2°. *Ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza; e per conseguenza.*

3° *Ogni piramide è la terza parte del prisma della stessa base e della stessa altezza.*

PROPOSIZIONE LXVI — *TEOREMA.*

153. ***Il piano che passa per la diagonali corrispondenti di due facce opposte di un parallelepipedo obliquo, lo divide in due prismi triangolari equivalenti*** **(fig. 30).**

Dim. Sia il parallelepipedo obliquo CH, e per le diagonali corrispondenti EF, BD di due facce opposte qualunque si faccia passare il piano $EBDF$, il quale dividerà il parallelepipedo proposto nei due solidi $ABDH$, $BDCG$. In primo luogo questi due solidi sono prismi triangolari; poichè i triangoli ABD, EFH, avendo i loro lati uguali e paralleli, sono uguali fra loro, e nel tempo stesso le facce laterali sono tre parallelogrammi. Quindi il solido $ABDH$ è

un prisma triangolare, e lo stesso si dimostra pel solido *BDCG*.

In secondo luogo, i due prismi triangolari accennati sono equivalenti, perchè hanno basi uguali ed altezze uguali (n° 149), dunque il piano *EBDF* divide il parallelepipedo obliquo in due prismi equivalenti. *C. D. D.*

154. *Corollario* I. Poichè il prisma triangolare ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza (n° 150), apparisce dalla proposizione precedente che

Un parallelepipedo qualunque ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza; e per conseguenza

155. *Corollario* II *Due parallelepipedi qualunque che hanno basi equivalenti, ed altezze eguali sono equivalenti.*

Da che si conchiude ancora che due parallelepipedi sono equivalenti, se hanno la stessa base, o basi equivalenti, e sono come nella fig. 37 situati fra gli stessi piani paralleli; per la qual cosa si potrà sempre trasformare un parallelepipedo obliquo qualunque in un parallepipedo rettangolo equivalente.

156. *Scolio*. Tutti i teoremi ricavati (n° 136 al n° 139) come corollarj della misura del parallelepipedo rettangolo si possono applicare a due parallelepipedi qualunque, a due prismi qualunque, ed anche a due piramidi qualunque. Ciò risulta da quanto fin qui si è esposto.

PROPOSIZIONE LXVII — *TEOREMA*.

157. *Se una piramide triangolare si tagli con un piano parallelo alla base, il tronco che resta tagliendo la piccola piramide è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per comune altezza quella del tronco, e per basi l una la base inferiore del tronco, l'altra la base superiore, e l'ultima una media proporzionale fra queste due basi* (fig. 38).

Dim. Sia *ABQDEF* un tronco di piramide triangolare. Per i punti *A*, *E*, *C* si faccia passare un piano, il quale distaccherà dal tronco la piramide triangolare *ABCE* che ha per base la base inferiore del tronco, e per altezza l'altezza del tronco medesimo; poichè il vertice *E* si ritrova nel piano *DEF*: questa è la prima delle tre piramidi.

Rimane la piramide quadrangolare che ha per vertice il punto *E*, e per base il trapezio *DACF*. Per i tre punti *D*, *E*, *C* si faccia passare un piano, che dividerà la piramide accennata in due piramidi triangolari. La prima *EDFC* può considerarsi come avente per base il triangolo *DEF* e per vertice il punto *C*, per conseguenza avrà per base la base superiore del tronco, e la stessa altezza di esso. Dunque è questa la seconda piramide.

In quanto alla piramide *EDAC*, a fine di trasformarla in un'altra equivalente, si conduca pel punto *E* nel piano *ADEB* la retta *EK* parallela ad *AD*, e si uniscano *DK* e *KC*. La piramide *EDAC* è equivalente alla piramide *ADCK*, perchè hanno la stessa base *ADC*, e la

stessa altezza, essendo i loro vertici situati in una retta EK parallela ad AD, ovvero al piano ADC. Ma la piramide $DACK$ può considerarsi come se avesse per base il triangolo AKC, e per vertice il punto D, resta dunque a dimostrare che la base AKC è media proporzionale fra le due basi del tronco. Infatti, essendo le rette DE, DF respettivamente parallele ad AB, AC, e rivolte dalla stessa parte, sarà l'angolo EDF uguale all'angolo BAC. Ma $DE = AK$, se dunque si considerano DF, ed AC come basi dei triangoli DEF, AKC, le perpendicolari abbassate dai vertici E, K su queste basi; ovvero le altezze dei due triangoli saranno uguali; e però i triangoli DEF, AKC staranno come le basi DF, AC. Ma i triangoli AKC, ABC stanno ancora come le basi AK, AB, ovvero come DE, AB, perchè hanno la stessa altezza; e per la simiglianza dei triangoli DEF, ABC si ha $DF : AC :: DE : AB$ dunque in fine sarà
$DEF : AKC :: AKC : ABC$. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXVIII — *TEOREMA.*

158. *Il tronco a basi parallele di una piramide qualunque è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per comune altezza quella del tronco, e per basi la base inferiore del tronco, la base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi* (fig. 28).

Dim. Sia S una piramide qualunque, T una piramide triangolare: si supponga che le basi $ABCD$, MNP sieno equivalenti, e situate in un medesimo piano; e che le altezze SO, TQ sieno uguali fra loro; indi si conduca un piano parallelo a quello delle basi che tagli le due piramidi.

Essendo per ipotesi le basi equivalenti, le sezioni $abcd$, mnp saranno ancora equivalenti (n° 102); per conseguenza le piramidi parziali $Sabcd$ $Tmnp$ saranno equivalenti. Ma le piramidi intere sono equivalenti, perchè hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, dunque il tronco della piramide poligona è equivalente al tronco della piramide triangolare; e però il tronco di una piramide qualunque si potrà decomporre in tre piramidi, come nella enunciazione del teorema. *C. D. D.*

159 *Corollario.* Da ciò si deduce che
Il tronco di piramide a basi parallele ha per misura il terzo del prodotto della sua altezza per la somma delle sue due basi e di una media proporzionale fra queste due basi.

PROPOSIZIONE LXIX — *TEOREMA.*

160. *Se si taglia un prisma triangolare con un piano inclinato alla base, il tronco sarà uguale alla somma di tre piramidi, che hanno per base comune la base inferiore del tronco, e per vertici quelli della base superiore* (fig. 39).

Dim. Sia $ABCDEF$ un tronco di prisma triangolare. Per i punti A, E, C si faccia passare un piano, il quale distaccherà dal tronco la piramide triangolare $ABCE$, che ha per base la base inferiore del tronco, e per vertice il punto E della base superiore.

Per i punti D, E, C si faccia passare un piano, il quale dividerà la piramide quadrangolare $EADFC$ in due piramidi triangolari. La prima $EDAC$ avendo per base il triangolo DAC, e per vertice il punto E, sarà equivalente alla piramide $DACB$, che ha la stessa base, e la stessa altezza, essendo i vertici E, B situati nella retta EB parallela al piano DAC. Ma la piramide $DACB$ può considerarsi come se avesse per base il triangolo ABC, e per vertice il punto D, dunque si ha la seconda piramide.

Rimane ora a considerare la piramide $EDFC$, la quale è equivalente alla piramide $AEFC$, poichè hanno la stessa base ECF, e la stessa altezza, essendo i vertici D, A situati nella retta DA parallela al piano ECF. Ma la piramide $AEFC$ può considerarsi come se avesse per base il triangolo ACF, e per vertice il punto E, e perciò è equivalente alla piramide $ACFB$. che ha la stessa base e la stessa altezza, dunque la piramide $ECFD$ è equivalente alla piramide $ACFB$ la quale sarà la terza piramide richiesta, perchè si può considerare come se avesse per base il triangolo ABC; e per vertice il punto F. C. D. D.

161 *Corollario.* Dal teorema precedente s'inferisce che

Il prisma triangolare troncato ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della somma delle tre perpendicolari abbassate su questa base dai vertici opposti.

162. *Scolio.* Quando si ha un tronco di prisma triangolare retto, le perpendicolari abbassate dai vertici. D, E, F sulla base ABC si confondono cogli spigoli DA, EB, FC; e però ne consegue che.

Il tronco di prisma triangolare retto ha per misura il prodotto della base pel terzo della somma dei suoi tre spigoli laterali.

PROPOSIZIONE LXX — *TEOREMA.*

163. *Ogni poliedro si può trasformare in una piramide equivalente* (fig. 31).

Dim. Potendosi ogni poliedro decomporre in piramidi (n° 111), il suo volume risulterà dalla somma delle piramidi parziali, le quali in generale avranno diverse altezze. Così, abbiam veduto (n° 110) che se si prenda un punto O nell'interno di un parallelepipedo AG, la rette tirate da quel punto a tutt'i vertici del poliedro , lo dividono in sei piramidi quadrangolari , che hanno per vertice comune il punto O, e per base le facce del poliedro medesimo. Quindi le altezze delle piramidi saranno le perpendicolari abbassate da quel vertice sopra ciascuna faccia. Or se si chiami L l'altezza della piramide $ABFEO$, non sarà difficile vedere che ciascuna delle cinque piramidi rimanenti potrà esser trasformata in una piramide equiva-

lente, che abbia per altezza l'altezza L della piramide $ABFEO$; perocchè (n. 156) si è dimostrato che due piramidi sono equivalenti, allorchè hanno le basi in ragione reciproca delle altezze. Se per esempio, si chiami K l'altezza della piramide $CDHGO$, questa si potrà trasformare in un'altra equivalente, che abbia l'altezza L, ed una base M, che sarà determinata dalla proporzione

$$L : K :: CDHG : M.$$

Similmente si potranno determinare le basi N, P, Q, R delle piramidi, che hanno la comune altezza L, e sono equivalenti alle quattro restanti piramidi del parallelepipedo AG. Se dunque si costruisce una piramide, che abbia L per altezza, e per base un poligono S, equivalente alla somma de' poligoni $ABFE$, M, N, P, Q, R, essa sarà equivalente al parallelepipedo AG. La costruzione del poligono S si esegue facilmente riducendo prima quei poligoni ad altrettanti qnadrati; e però ogni poliedro si può trasformare in una piramide equivalente. *C. D. D.*

164 *Scolio*. È facile vedere che a due piramidi si possono sempre sostituire due parallelepipedi rettangoli ad esse rispettivamente equivalenti. Infatti, si può sempre costruire un parallelogrammo rettangolo equivalente al poligono, che forma la base di una delle due piramidi; ed in tal guisa si ha la base di uno de' due parallelepipedi; l'altezza sarà la terza parte dell'altezza della piramide medesima. Quindi se si sapesse trovare in linee il rapporto di due parallelepipedi rettangoli, si potrebbe ridurre il rapporto di due poliedri qualunque al semplice rapporto di due linee, come nella geometria piana si è fatto per due poligoni qualunque. Questo risultamento è della più grande importanza, e fa conoscere la potenza della geometria; dappoichè il rapporto di due linee si può sempre assegnare in numeri, sia esattamente, sia con quella approssimazione che si vuole; per conseguenza la riduzione del rapporto delle figure piane e solide a quello di due linee non solamente è per se stesso un mirabile concepimento geometrico; ma fa vedere ancora la possibilità di applicare alla pratica le speculazioni della geometria. Per queste ragioni ci occuperemo nella proposizione seguente del rapporto in linee di due parallelepipedi rettangoli.

PROPOSIZIONE LXXI — TEOREMA.

165. *Il rapporto di due parallelepipedi rettangoli si può sempre esibire in linee* (fig. 33).

Dim. Sieno AB, AD, AC le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo BM ed ab, ad, ac sieno quelle di un altro parallelepipedo rettangolo bm. Si trovi una quarta proporzionale G in ordine alle tre linee ac, AB, AD, ed una quarta proporzionale g in ordine alle tre linee AC, ab, ad. Dico che se due linee G, e g staranno fra loro come i due parallelepipedi BM, e bm.

Infatti, avendosi per costruzione

$$ac : AB :: AD : G$$
$$AC : ab :: ad : g.$$

Sarà il rettangolo ABD equivalente al rettangolo acG: ed il rettangolo abd equivalente al rettangolo ACg. Donde si deduce che se si faccia $pq = AC$, $pr = ac$, $po = G$, e $ps = g$, il parallelepipedo BM sarà equivalente al parallelepipedo pu; poichè il rettangolo rpo e equivalente al rettangolo ABD, e $pq = AC$. Parimente il parallelepipedo bm sarà equivalente al parallelepipedo ph, perchè il rettangolo qps è equivalente al rettangolo abd, e $pr = ac$. Ma i parallelepipedi pu, ph hanno una medesima faccia, o base qpr, e per conseguenza stanno fra loro come le altezze po, ps, ovvero come G, g, dunque sarà

$$BM : bm :: G : g \; . \; C. \; D. \; D.$$

CAPITOLO XI.

DEI POLIEDRI SIMILI.

166. Dato un poliedro qualunque, è evidente che si può sempre concepire un altro poliedro, il quale sotto diversa estensione abbia la medesima figura. Questi due solidi saranno allora composti di un medesimo numero di facce simili e similmente disposte, ed avranno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, come pure gli angoli solidi, ed in fine saranno ne' due poliedri proporzionali tutti gli spigoli omologhi, vale a dire quelli che caderebbero nella stessa direzione quando si soprapponesse un angolo solido di un poliedro al suo uguale nel poliedro simile.

167. Or siccome per determinare un poliedro non è necessario conoscere tutte le parti che lo compongono, così pure non è necessario verificare tutti i caratteri di simiglianza sopraccennati per concludere che due poliedri sono simili. Quindi si possono definire i poliedri simili nel modo qui appresso.

168. Due poliedri si dicono *simili* quando hanno tutte le loro facce simili, similmente disposte, e gli angoli solidi formati dalle facce omologhe rispettivamente uguali. (*)

PROPOSIZIONE LXXII — *TEOREMA*.

169. *Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la piramide parziale sarà simile alla piramide intera* (fig. 25).

Dim. Sia la piramide $SABCD$ tagliata da un piano $abcd$ parallelo alla base; dico che la piramide $Sabcd$ è simile a $SABCD$. Infatti,

(*) Qualche *restauratore* di Euclide ha trovato a ridire su questa definizione de' poliedri simili, dovuta al celebre geometra Roberto Simson. Ma essa è stata giudicata esatta dai Matematici; e non può mai dar luogo a veruno equivoco, se si terranno presenti le considerazioni, che precedono la definizione medesima.

tutte le facce dell'una sono simili alle facce dell'altra; e però gli spigoli omologhi sono proporzionali, e gli angoli piani degli angoli solidi omologhi sono uguali ciascuno a ciascuno. Inoltre è evidente che gli angoli diedri omologhi sono uguali; dunque saranno ancora uguali gli angoli solidi omologhi (n. 80); e per conseguenza le due piramidi sono simili. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXIII. — *TEOREMA.*

170. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati* (fig. 40).

Dim. Sieno *SABC*, e *sabc* due piramidi triangolari che abbiano i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati: gli angoli triedri *S*, e *s* avendo i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti, sono uguali fra loro (n. 77), e per conseguenza hanno gli angoli piani uguali. Lo stesso si può dimostrare per gli angoli triedri *A*, ed *a*, come pure per gli angoli triedri *B*, e *b*. Quindi i due triangoli *ASB*, ed *asb* sono equiangoli, e perciò simili. Nello stesso modo si dimostra la simiglianza delle altre facce delle due piramidi triangolari, dunque queste piramidi sono simili. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXIV — *TEOREMA.*

171. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno una faccia simile adiacente a tre angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno* (fig. 40).

Dim. Nelle piramidi triangolari *SABC*, *sabc* sieno *ABC*, *abc* le due facce simili, gli angoli triedri *A* ed *a* saranno uguali, perchè hanno un angolo piano uguale adiacente a due angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti (n. 79); per conseguenza saranno uguali gli angoli diedri *SA sa*; e nello stesso modo si dimostrerà l'uguaglianza degli altri angoli diedri. Dunque (n. 176), le due piramidi triangolari sono simili. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXV — *TEOREMA.*

172. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce respettivamente simili e similmente disposte* (fig. 40).

Dim. Sia l'angolo diedro *SA* uguale all'angolo diedro *sa*, e le facce *SAB*, *SAC* che comprendono il primo sieno rispettivamente simili alle facce *sab*, *sac* che comprendono il secondo; gli angoli triedri *S*, *s* saranno uguali, perchè hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno (n. 78), per conseguenza sono uguali gli angoli diedri *SB*, e *sb*. Parimente gli angoli triedri *A*, ed *a* saranno uguali, perchè hanno un angolo

diedro ugnale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti; perciò saranno uguali gli angoli diedri AB, ed ab.

Quindi le due piramidi triangolari proposte hanno le facce simili ASB, asb adiacenti a tre angoli diedri rispettivamente uguali e similmente situati; e però sono simili (n. 171). *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXVI — *TEOREMA*

173. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno tre facce simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 40);

Dim. Sieno le facce ASB, ASC, BSC rispettivamente simili alle facce asb, asc, bsc e similmente disposte. Gli angoli triedri S, e s saranno uguali, poichè hanno i loro tre angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati; e per conseguenza risultano uguali gli angoli diedri SA; sa; e le due piramidi proposte saranno simili in virtù del teorema precedente. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXVII — *TEOREMA.*

174. *Due piramidi triangolari simili hanno i loro spigoli omologhi proporzionali alle altezze* (fig. 40).

Dim. Sieno $SABC$, $sabc$ due piramidi triangolari simili. Facendo coincidere l'angolo triedro s col suo uguale S, la piramide $sabc$ verrà rappresentata dalla piramide $SEDF$. La retta ED sarà parallela ad AB, perchè l'angolo $SED = SAB$; e per la stessa ragione la retta DF sarà parallela a BC. Quindi il piano EDF sarà parallelo al piano ABC (n. 42). Or se dal punto S si abbassi la perpendicolare sopra uno di questi piani, essa sarà ancora perpendicolare all'altro. Sieno SO, SG le altezze delle due piramidi prese sopra questa perpendicolare, in virtù dei piani paralleli EDF, ABC, si avrà (n. 100),

$$SA : SE : . SO : SG,$$

per conseguenza le altezze sono proporzionali agli spigoli omologhi. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXVIII — *TEOREMA.*

175. *Due poliedri simili sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente e similmente disposte* (fig. 32.)

Dim. Sieno SAB, $ABCD$, CDE tre facce consecutive del primo poliedro, e sab, $abcd$. cde le tre facce omologhe del secondo. Supponiamo che i due poliedri sieno decomposti in piramidi aventi per vertici i punti omologhi S, s, e per basi le facce dei poliedri mede-

simi; supponiamo inoltre che queste piramidi sieno divise in piramidi triangolari aventi per vertici gli stessi punti S, s; e si tirino le diagonali SC, SD, SE, sc, sd, se, come pure le rette AC, ac.

Le due facce $ABCD$, $abcd$ essendo simili per ipotesi saranno ancora simili i triangoli ABC, abc.

Da un'altra parte sono uguali gli angoli diedri $CBAS$, $cbas$: poichè essendo simili i poliedri sono uguali gli angoli solidi omologhi, dunque le due piramidi triangolari $SABC$, $sabc$ hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili rispettivamente e similmente disposte, perciò saranno simili. Dal che si deduce la simiglianza delle facce omologhe ASC, asc. e l'uguaglianza degli angoli diedri $SABC$, $sacb$. Gli angoli diedri $SACD$, $sacd$ saranno ancora uguali, perchè sono supplementi dei precedenti. Di più, i triangoli ADC, adc sono simili, dunque le due piramidi triangolari $SACD$, $sacd$ hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte; e però queste piramidi sono simili. Da ciò si conclude la simiglianza delle facce omologhe DSC, dsc, e l'uguaglianza degli angoli diedri $SDCA$, $sdca$. Or essendo simili i poliedri, gli angoli diedri omologhi $EDCA$, $edca$ sono uguali, perchè sono uguali gli angoli solidi omologhi. Se dunque da questi ultimi angoli diedri si tolgono i precedenti, i rimanenti angoli diedri $SCDE$, $scde$ saranno uguali. Ma i triangoli DCE, dce sono simili (e lo sarebbero ancora se in luogo di essere facce omologhe dei due poliedri, facessero semplicemente parte di due facce omologhe); dunque le due piramidi triangolari $SCDE$, $scde$ hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili rispettivamente e similmente disposte, e perciò sono simili.

Continuando nello stesso modo, si potrà dimostrare progressivamente la simiglianza di tutte le piramidi triangolari che compongono i due poliedri proposti. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXIX — *TEOREMA.*

176. *Nei poliedri simili gli spigoli omologhi, le diagonali omologhe delle facce omologhe, e le diagonali interne omologhe sono proporzionali* (fig. 32).

Dim. Infatti, 1° dalla simiglianza delle facce omologhe dei due poliedri si deducono le proporzioni

$SA : sa : : AB : ab : : CD : cd : : DE : de$, ecc. e però gli spigoli omologhi sono proporzionali.

2°. Si considerino due diagonali omologhe, per esempio, AC, ac di due facce omologhe $ABCD$, $abcd$, è manifesto che le diagonali accennate sono proporzionali agli spigoli omologhi AB, ab. Parimente le diagonali omologhe di due altre facce omologhe sono proporzionali a due spigoli omologhi; ma tutti gli spigoli omologhi sono proporzionali, dunque le diagonali omologhe delle facce omologhe sono proporzionali.

3°. Finalmente, se si considerano due diagonali omologhe interne, per esempio, *SE*, *se*, queste saranno proporzionali agli spigoli omologhi *CD*, *cd*, in virtù della simiglianza delle piramidi *SCDE*, *scde*. Dunque le diagonali interne omologhe sono proporzionali. *C. D.D.*

PROPOSIZIONE LXXX — *TEOREMA*.

177. *Le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi* (fig. 32).

Dim. Le aje dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, dunque sarà la faccia *SAB* alla faccia *sab* come il quadrato di *AB* al quadrato di *ab*. Parimente sarà la faccia *ABCD* alla faccia *abcd* come il quadrato di *AB* al quadrato di *ab*, e la faccia *DCE* alla faccia *dce* come il quadrato di *DC* al quadrato di *dc*. Ma tutti gli spigoli omologhi dei poliedri simili sono proporzionali, e però sono proporzionali anche i loro quadrati ; dunque sarà la faccia *ASB* alla faccia *asb* come la faccia *ABCD* ad *abcd*, e come *DCE* a *dce*, ecc.

Quindi la somma di tutte le facce del primo poliedro starà alla somma di tutte le facce del secondo come una faccia qualunque dell'uno sta alla faccia omologa dell'altro, ovvero come il quadrato di uno spigolo del primo sta al quadrato di uno spigolo omologo del secondo. Dunque le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXXI — *TEOREMA*.

178. *I poliedri simili stanno fra loro come i cubi degli spigoli omologhi* (fig. 40).

Dim. Si considerino in primo luogo le due piramidi triangolari simili *SABC*, *sabc*. Or due piramidi stanno fra loro in ragion composta dalla ragione delle basi *ABC abc*, e dalla ragione delle altezze *SO so*. Ma le basi essendo simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi, e questi lati sono proporzionali alle altezze (n. 100), dunque le due piramidi sono in ragion triplicata de' lati omologhi, ovvero come i cubi di questi lati.

Ciò premesso, passiamo a considerare due poliedri simili qualunque (fig. 32), che si potranno concepire divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente e similmente disposte. Ciascuna delle piramidi del primo poliedro, per esempio, *SABC* starà alla sua omologa *sabc* nell'altro, come il cubo di uno dei suoi spigoli *AB* sta al cubo dello spigolo omologo *ab* dell'altra piramide, ma tutti questi spigoli sono nei due poliedri nel medesimo rapporto, poichè sono necessariamente o gli spigoli omologhi dei poliedri proposti, o le diagonali omologhe delle loro facce omologhe ,

e infine le diagonali omologhe interne; per conseguenza i loro cubi formeranno una serie di rapporti uguali, e questi rapporti essendo uguali a quelli delle piramidi, si concluderà che questi ultimi rapporti sono uguali fra loro. Laonde la somma delle piramidi costituenti il primo poliedro starà alla somma delle piramidi costituenti il secondo, come una qualunque piramide *SABC* dell'uno sta alla corrispondente piramide *sabc* dell'altro, ovvero come il cubo di uno spigolo del primo poliedro sta al cubo dello spigolo omologo del secondo. Mettendo in luogo delle piramidi i poliedri da esse composti, ne risulterà che i poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi. *C. D D.*

CAPITOLO XII.

DEI POLIEDRI SIMMETRICI.

179. Per essere uguali due piramidi triangolari non basta che abbiano le loro facce uguali ciascuna a ciascuna, ma si richiede ancora che queste facce sieno disposte nello stesso ordine; poichè se fossero disposte in ordine inverso non potrebbero affatto coincidere, stante la simmetria degli angoli solidi. Conviene adunque considerare le figure solide, nella costituzione delle quali entrano gli angoli solidi simmetrici.

PROPOSIZIONE LXXXII — PROBLEMA.

180. *Se due piramidi triangolari, che hanno le facce rispettivamente uguali, ma disposte in ordine inverso, sono situate in modo che due facce uguali coincidano, il piano della faccia comune sarà perpendicolare alla retta congiungente i vertici opposti, e la dividerà in due parti uguali* (fig. 41).

Dim. Sieno *SABC*, e *S'ABC* le due piramidi triangolari proposte: sia *O* il punto di mezzo della retta *SS'* che unisce i vertici opposti alla base comune *ABC*; si conducano le rette *AO*, *BO*, *CO*. Essendo $AS = AS'$, il triangolo SAS' sarà isoscele, e per conseguenza la retta *AO* è perpendicolare alla retta *SS'*. Parimente essendo $BS = BS'$, e $CS = CS'$, le rette *BO*, e *CO* sono perpendicolari a *SS'*. Dunque (n° 13) le tre rette *AO*, *BO*, *CO* si trovano nel piano che sarebbe prodotto dal rivolgimento dell'angolo retto *SOC* intorno al lato *SO* supposto immobile; ma questo piano contiene i tre punti *A*, *B*, *C*; dunque esso è il piano della faccia comune *ABC*. *C. D. D.*

181. *Scolio.* Dalla proposizione precedente è derivato che due piramidi triangolari si dicono *simmetriche* quando hanno le loro facce uguali ciascuna a ciascuna e disposte in ordine inverso; dappoichè possono essere situate simmetricamente rispetto a un medesimo piano, cioè in modo che i vertici degli angoli solidi omologhi

sono situati a distanze uguali dal piano accennato, sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

PROPOSIZIONE LXXXIII — TEOREMA.

182. *Due piramidi triangolari simmetriche hanno gli angoli diedri omologhi rispettivamente uguali, e gli angoli triedri omologhi simmetrici* (fig. 42).

Dim. Sieno le due piramidi simmetriche *SABC*, *sabc*, nelle quali sia la faccia $SBA = sba$, $SBC = sbc$, $SCA = sca$, e $CBA = cba$.
Essendo uguali le facce omologhe, gli angoli piani omologhi di queste facce saranno rispettivamente uguali; e gli angoli triedri omologhi saranno composti di angoli piani rispettivamente uguali; per conseguenza (n° 79) l'angolo diedro di due facce contigue qualunque in una delle piramidi proposte sarà uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altra; ma queste facce sono disposte in ordine inverso, dunque gli angoli solidi omologhi saranno simmetrici. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXXIV — TEOREMA.

183. *Una piramide triangolare non può avere che una sola simmetrica* (fig. 42).

Dim. Infatti, se si voglia formare una piramide simmetrica alla piramide *SABC*, vi dovrà essere sempre un angolo triedro costituito di tre angoli piani *BSA*, *BSC*, *ASC* disposti in ordine inverso a quello, in cui sono disposti nella piramide *SABC*. Or si è dimostrato (n° 76) che questi tre angoli non si possono disporre che in due soli modi diversi, dunque le tre facce *BSA*, *BSC*, *ASC* non si possono disporre che in due soli modi differenti; ma quando queste facce si saranno riunite in un punto per formare l'angolo simmetrico all'angolo *S*, la quarta faccia trovasi determinata, dunque non può esservi che una sola piramide *sabc* simmetrica alla piramide *SABC*. *C. D. D.*

184. *Scolio*. Le proposizioni dimostrate nei paragrafi 113, 115, 116, e 117 si verificano ancora quando gli elementi rispettivamente eguali nelle due piramidi, sono in esse inversamente disposti, solamente in vece di dire che le piramidi sono *uguali*, si dirà che sono *simmetriche*; e così si avranno diversi criterj per giudicare della simmetria delle piramidi triangolari. Infatti, se si suppone costruita una piramide simmetrica ad una delle due piramidi proposte, essa in virtù delle proposizioni sopraccennate dovrà risultare uguale all'altra piramide proposta; e però le due piramidi proposte saranno simmetriche fra loro.

PROPOSIZIONE LXXXV — *TEOREMA*.

185. *Se da tutti i vertici di un poliedro, decomposto in piramidi triangolari, si abbassino delle rette perpendicolari ad un medesimo piano, e si prolunghino al di là di questo piano di quantità uguali ad esse medesime, le estremità di queste perpendicolari saranno i vertici di un nuovo poliedro, che potrà essere decomposto in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche a quelle del primo ed inversamente disposte* (fig. 43.)

Dim. Sia S il vertice di tutte le piramidi costituenti il poliedro proposto; A, B, C, D, ecc. dinotino differenti vertici del poliedro medesimo, ed s, a, b, c, d, ecc. i punti corrispondenti del secondo poliedro determinati nel modo sopraccennato. Finalmente sieno M e N, i punti di mezzo delle rette Ss, e Bb, vale a dire i piedi di queste perpendicolari nel piano PQ, su cui sono state abbassate.

Le rette Ss, e Bb, essendo perpendicolari a un medesimo piano PQ, sono paralelle fra loro, e per conseguenza sono situate in un medesimo piano; inoltre sono perpendicolari alla retta MN che unisce i loro piedi nel piano PQ; perciò immaginando che il trapezio $bsMN$ giri intorno alla retta MN, esso potrà combaciare col trapezio $BSMN$, e però si avrà $SB = sb$. Nello stesso modo si dimostrerà che $SA = sa$, $SC = sc$, $AB = ab$, $BC = bc$; e per conseguenza le due piramidi triangolari $SABC$, $sabc$, avranno le facce uguali ciascuna a ciascuna; ma queste sono inversamente disposte, dunque le piramidi accennate sono simmetriche fra loro. Similmente si potrà dimostrare che le piramidi triangolari $SACD$, $sacd$ sono simmetriche, e così di seguito. Dunque i due poliedri sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche rispettivamente; e da un'altra parte è manifesto che queste piramidi si trovano inversamente disposte nei due poliedri. Infatti basta per veder ciò chiaramente osservare la fig. 44. dove i due poliedri sono situati l'uno acccanto all'altro. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXXVI — *TEOREMA*.

186. *Reciprocamente, due poliedri composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte, possono essere situati in modo che le rette, le quali uniscono i vertici omologhi sieno divise in due parti uguali da un medesimo piano perpendicolare a tutte queste rette* (fig. 44.)

Dim Sieno S, s i due poliedri proposti. Da tutti i vertici del poliedro S si abbassino delle perpendicolari sopra un piano qualunque, le quali si prolunghino al di sotto di questo piano di quantità uguali ad esse medesime, si formerà un nuovo poliedro, che chiameremo S'. I poliedri, S e S' in virtù della proposizione precedente saranno composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simme-

triche inversamente disposte. Ma i due poliedri proposti S, e s sono anch'essi per supposizione composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte, e da un'altra parte una piramide triangolare non può aver che una sola simmetrica (n° 183), dunque i poliedri s, e S' sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari uguali ciascuna a ciascuna, e similmente disposte; e per conseguenza questi poliedri sono uguali fra loro (n°122).

Da ciò si deduce che il poliedro s può esser soprapposto al poliedro S', ed in questa situazione del poliedro s rispetto a S, il piano sopra nominato dividerà in due parti uguali tutte le rette che uniscono i loro vertici omologhi, e sarà perpendicolare a queste medesime rette. *C. D. D.*

187. *Scolio* I. Dalla proposizione precedente è derivato che due poliedri son detti *simmetrici* fra loro quando si possono decomporre in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche ed inversamente disposte; dappoichè possono sempre essere situati simmetricamente rispetto a un medesimo piano. Quindi il Legendre, che fu primo a parlare dei poliedri simmetrici, non li considera se non relativamente alla posizione che possono avere rispetto ad un medesimo piano.

Infatti, definisce i poliedri simmetrici dicendo esser quelli che, avendo una base comune, sono costrutti similmente l'uno al di sopra del piano di questa base, l'altro al di sotto, con questa condizione che i vertici degli angoli solidi omologhi sieno situati ad uguali distanze dal piano della base, sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

Partendo da questa definizione il lodato geometra ha dato alcune proposizioni intorno ai poliedri simmetrici, ma sembra che con tale procedimento rimanga nascosto il cammino da esso seguito per arrivare ad una sì bella scoperta.

188. *Scolio* II. La proposizione precedente prova che un poliedro non può avere che un solo simmetrico, e la proposizione (n°185) offre il mezzo di costruire un poliedro simmetrico ad un poliedro dato.

PROPOSIZIONE LXXXVII — *TEOREMA*.

189. *Due poliedri simmetrici hanno le facce omologhe rispettivamente uguali, gli angoli diedri omologhi essi pure rispettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici* (fig. 44),

Dim. Sieno *SABC*, *SACD*, ecc, le piramidi costituenti uno dei poliedri proposti, e *sabc*, *sacd*, ecc. le piramidi omologhe costituenti l'altro poliedro.

1°. È manifesto che le facce omologhe dei due poliedri sono composte di facce omologhe ed uguali delle piramidi costituenti, e per conseguenza le facce omologhe dei due poliedri simmetrici sono uguali.

2°. Due angoli diedri omologhi dei due poliedri o sono angoli diedri omologhi, come AB, ab, delle piramidi costituenti, o sono composti di un medesimo numero di angoli diedri omologhi delle piramidi medesime, come avviene per gli angoli diedri omologhi CA, ca, che sono composti degli angoli diedri $SCAB$, $SCAD$, $scab$, $scad$. In ambedue i casi gli angoli diedri omologhi dei due poliedri saranno uguali.

3°. Finalmente gli angoli solidi omologhi dei due poliedri sono composti degli angoli triedri omologhi delle piramidi costituenti, come può vedersi negli angoli solidi A, ed a, che sono composti degli angoli triedri $ASBC$, $ASCD$, $asbc$, $ascd$ omologhi, e disposti in ordine inverso, perchè queste stesse piramidi sono disposte inversamente nei due poliedri. Ma gli angoli triedri accennati sono simmetrici, dunque lo saranno ancora gli angoli solidi omologhi dei due poliedri. *C. D. D.*

PROPOSIZONE LXXXVIII — *TEOREMA.*

190. *Due poliedri sono simmetrici quando hanno le facce rispettivamente uguali, disposte in ordine inverso, e gli angoli diedri omologhi essi pure rispettivamente uguali* (fig. 44).

Dim Siano S, s i due poliedri proposti, e supponiamo che siasi costrutto un terzo poliedro S' simmetrico al poliedro S, esso avrà con questo poliedro (n. 189) gli angoli diedri omologhi eguali, e le facce omologhe eguali ed inversamente disposte. Per conseguenza i poliedri S', s avranno gli angoli diedri rispettivamente eguali, e le facce omologhe eguali e similmente disposte, e perciò saranno eguali (n. 124.) E poichè i poliedri S, S' sono simmetrici, lo saranno pure i poliedri proposti S, s. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE LXXXIX — *TEOREMA.*

191. *Due prismi sono simmetrici quando hanno un angolo solido simmetrico compreso tra facce omologhe uguali ciascuna a ciascuna* (fig. 29).

Dim. Supponiamo che nei due prismi CF, cf sia l'angolo triedro A simmetrico all'angolo triedro a, la faccia $ABD = abd$, $AK = ag$, ed $AG = ak$. Se si costruisce un terzo prisma, che chiameremo $C'F'$, simmetrico al prisma CF, questi due prismi avranno le facce omologhe rispettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici fra loro (n° 188). Dunque i due prismi CF', e cf avranno un angolo solido uguale compreso tra facce respettivamente uguali; perciò saranno uguali (n. 119), ed essendo simmetrici i prismi CF, CF', lo saranno pure i prismi proposti CF, cf. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XC — TEOREMA

192. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti di due facce opposte di un parallelepipedo, lo divide in due prismi triangolari simmetrici fra loro* (fig. 30).

Dim. Infatti, i due prismi triangolari *ABDEFH*, *BCDFGE* hanno le facce *AE*, *CF* uguali come facce opposte del parallelepipedo; hanno pure le facce uguali *DH*, *CE* per la stessa ragione, ed è poi il triangolo *ABD* uguale al triangolo *EGF*, dunque i due prismi accennati hanno gli angoli solidi *A*, e *G* compresi tra facce omologhe rispettivamente uguali; ma questi angoli solidi sono simmetrici (n° 107), dunque (n° 191) i due prismi sono simmetrici fra loro. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XCI — TEOREMA.

193. *Due poliedri simmetrici sono equivalenti fra loro* (fig. 41).

Dim. Infatti, 1.° Due piramidi triangolari simmetriche *SABC*, e *S'ABC* sono equivalenti, poichè hanno una medesima base *ABC*, ed uguali altezze *SO*, *S'O*.

2.° Due poliedri simmetrici sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche, dunque essendo equivalenti le piramidi accennate, saranno pure equivalenti i poliedri simmetrici. *C. D. D.*

194. *Scolio*. Apparisce dal teorema precedente che i poliedri simmetrici costituiscono un genere intermedio fra i poliedri uguali, ed i poliedri equivalenti; il che non avviene nelle figure piane rettilinee, dove fra l'uguaglianza e l'equivalenza di queste figure non esiste alcuno stato intermedio. Una siffatta dottrina fu totalmente ignota agli antichi geometri, i quali perciò hanno a noi tramandata una teorica imperfetta dei poliedri.

CAPITOLO XIII.

DEI POLIEDRI REGOLARI.

195. Un poliedro dicesi *regolare* quando tutte le facce sono poligoni regolari, uguali, e tutti i suoi angoli solidi sono pure uguali fra loro.

196. Or il più semplice di tutti i poligoni regolari è il triangolo equilatero, di cui ciascun angolo equivale a due terzi di un angolo retto: se dunque si riunissero più triangoli equilateri per formare un angolo solido, non se ne potrebbero adoperare che tre, quattro, o cinque; dappoichè sei dei loro angoli piani riuniti equivalgono a sei volte due terzi di un angolo retto, ovvero a quattro angoli retti, e perciò non possono formare un angolo solido (n. 67). Con più ra-

gione non se ne potrebbero prendere più di sei. Laonde non possono esistere che tre specie di poliedri regolari con facce triangolari.

197. Dopo il triangolo equilatero viene il quadrato, di cui ciascun angolo è retto. Se dunque si prendano più quadrati per formare un angolo solido, non se ne potranno adoperare che tre; e per conseguenza non può esistere che un solo poliedro con facce quadrate.

198. Quanto al pentagono regolare, ciascuno dei suoi angoli equivale a sei quinti di un angolo retto, onde non se potrebbero adoperare più di tre per formare un angolo solido. Quindi un solo poliedro regolare può esistere con facce pentagonali.

199. L' angolo di un esagono regolare vale quattro terzi di un angolo retto, tre dei quali fanno quattro retti; e perciò non possono formare un angolo solido. Dunque non può esistere nessun poliedro regolare con facce esagonali. Similmente non può esistere alcun poliedro con facce ettagonali, ottagonali, ecc., perchè ciascun angolo dell'ettagono regolare, dell'ottagono regolare, e di tutti gli altri poligoni regolari di maggior numero di lati, è maggiore di quello dell'esagono regolare.

200. Dalle cose precedenti si deduce che possono esistere soltanto cinque poliedri regolari, e sono.

1. Il *tetraedro regolare, o piramide triangolare regolare*, formata da quattro triangoli equilateri uguali.

2. L'*esaedro regolare*, o *cubo*, formato da sei quadrati uguali.

3. L' *ottaedro regolare*, formato da otto triangoli equilateri uguali.

4. Il *dodecaedro regolare*, formato da dodici pentagoni regolari uguali.

5. L'*icosaedro regolare*, formato da venti triangoli equilateri uguali.

201. I geometri si sono occupati a dare le costruzioni di questi poliedri; ma siccome non si parla di essi negli elementi, così rimettiamo chi volesse conoscerle al Lib. XIII degli Elementi di Euclide, alla Geometria Solida del Caravelli, ad una Appendice di quella del Legendre, ecc. Qui ci limiteremo ad osservare che gli antichi geometri davano specialmente il nome di *tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro, icosaedro* ai cinque poliedri regolari, perchè non si sono occupati dei poliedri in generale, ma delle piramidi, dei prismi, e de' poliedri regolari.

CAPITOLO XIV.

DEI TRE CORPI ROTONDI.

202. I solidi, de' quali fin qui si è parlato, sono terminati da superficie piane; ma oltre questi solidi la geometria elementare ne considera tre altri, cioè il *cilindro retto*, il *cono retto*, e la *sfera*, ai quali si dà il nome di *corpi rotondi*, perchè i due primi sono terminati da superficie curve e da superficie piane, e l' ultima da una sola superficie curva.

203. Il *cilindro retto* (fig. 45) è il solido prodotto dalla rotazione di un rettangolo *ABCD* intorno ad un suo lato immobile *AB* Questo lato chiamasi *asse* del cilindro; i cerchi *DHE*, *CGF* descritti dai lati *AD*, *BC* ne sono le *basi*, e la linea *CD*, che genera la *superficie laterale* o *convessa* del cilindro, ne è il *lato*. Finalmente l'*altezza* del cilindro è la distanza dei piani paralleli delle due basi: essa è eguale all'asse, o al lato del cilindro medesimo.

204. Da questa genesi del cilindro ne consegue che ogni sezione fatta da un piano che passa per l'asse, è un rettangolo come *CDEF* doppio del rettangolo generatore *ABCD*, e che ogni sezione *PRQ* fatta da un piano perpendicolare all'asse *AB*, è un cerchio uguale a ciascuna base. Infatti, nel rivolgimento del rettangolo *ABCD* intorno ad *AB*, la retta *OQ* perpendicolare ad *AB* descrive un cerchio uguale alla base.

205. Due cilindri retti si dicono *simili* allorchè sono prodotti dalle rotazioni di due rettangoli simili *ABCD*, *abcd* intorno a lati omologhi *AB*, *ab*; cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

206. Il *cono retto* (fig. 46) è il solido, che vien generato dal rivolgimento di un triangolo rettangolo *SAO* intorno ad un cateto immobile *SO*. L'altro cateto *AO* genera il cerchio *ANB*, che dicesi *base* del cono. Il punto *S* si chiama *vertice* del cono; il cateto *SO* che unisce il vertice col centro della base è l'*asse* del cono; e finalmente si dà il nome di *lato*, o *apotema* alla linea *SA* che descrive la *superficie laterale* o *convessa* del cono medesimo.

207. Apparisce da siffatta genesi del cono che ogni sezione fatta da un piano, il quale passa per l'asse, è un triangolo isoscele come *ASB* doppio del triangolo generatore *SOB*; e che ogni sezione *EMD* perpendicolare all'asse è un cerchio.

208. Due coni retti sono detti *simili* allorchè sono prodotti dalle rotazioni di due triangoli rettangoli simili *ASO* *aso* intorno a cateti omologhi, cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

209. Il *cono troncato*, o *tronco di cono* (fig. 47) è la porzione di cono compresa fra la base ed un piano ad essa parallelo. Quindi il tronco di cono può considerarsi come prodotto dalla rotazione di un trapezio *AODH*, di cui gli angoli *O*, e *D* sono retti, intorno al lato immobile *OD*. Questo lato dicesi *asse* o *altezza* del tronco; e si chiamano poi *basi* i cerchi descritti dai lati *DA*, *DH*; e finalmente alla linea *AH* si dà il nome di *lato del tronco di cono*.

210. I tronchi di due coni retti si dicono *simili* quando sono prodotti da trapezj simili; cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle basi corrispondenti.

211. La *sfera* (fig. 48) è il solido generato dal rivolgimento di un semicerchio *ADB* intorno ad un suo diametro *AB*. Quindi la *superficie sferica* che vien prodotta dalla rotazione della semicirconferenza *ADB*, ha tutti i suoi punti equidistanti dal centro *O* del semicerchio generatore, che dicesi *centro della sfera*. La distanza del

centro della sfera a un punto qualunque della sua superficie si chiama *raggio della sfera*. È manifesto che tutti i raggi di una sfera sono uguali fra loro, e che tutti i diametri sono uguali e doppj de'raggi.

212. Dalla genesi della sfera risulta ancora che ogni sezione fatta da un piano, il quale passa pel centro, è un cerchio, di cui il raggio è il raggio della sfera. Infatti tutti i punti come A, L, B comuni al piano accennato ed alla superficie sferica si trovano ad un uguale distanza dal punto O; per conseguenza la sezione medesima ALB è un cerchio che ha per diametro il diametro della sfera. In generale ogni sezione MKN fatta con un piano qualunque è un cerchio; poichè se dal centro O si abbassi sul piano MKN la perpendicolare OE, le oblique OM, OK, ON, ecc, essendo uguali come raggi della sfera saranno equidistanti dal piede E della perpendicolare; e però le rette EM, EK, EN, ecc. saranno uguali fra loro, e la sezione MKN sarà un cerchio.

213. Ogni circolo della sfera che passa pel centro di essa dicesi *circolo massimo*; chiamasi *circolo minore* quello che non passa pel centro della sfera. È evidente che i circoli massimi sono uguali fra loro, poichè hanno il medesimo centro ed il medesimo raggio della sfera.

214. Due circoli massimi si tagliano sempre in due parti uguali, perchè la loro comune intersezione, passando pel centro, è un diametro. Quindi le loro circonferenze s' intersegano alla distanza di 180 gradi,

215. Ogni circolo massimo divide la sfera e la sua superficie in due parti uguali; dappoichè un circolo massimo rivolgendosi intorno al proprio diametro deve produrre la sfera medesima. La metà di una sfera dicesi *emisfero*.

216. Il centro di un circolo minore e quello della sfera sono in una medesima retta perpendicolare al piano del circolo minore.

217. I circoli minori sono tanto più piccoli quanto più si allontanano dal centro della sfera ; perchè più grande è quella distanza, e più piccola diviene la corda, come MN, che è il diametro del circolo minore MKN,

218. Per due punti dati sopra la superficie della sfera può sempre passare un arco di circolo massimo ; poichè i due punti dati ed il centro della sfera sono tre punti che determinano la posizione di un piano.

Nondimeno se i due punti accennati fossero alle estremità d' un diametro, allora questi due punti ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbero infiniti circoli massimi che potrebbero passare per i due punti dati.

219. Un piano indefinito che ha un solo punto comune colla superficie di una sfera dicesi *piano tangente* della sfera medesima. Esso può considerarsi come prodotto dal rivolgimento della tangente RS al cerchio generatore ADB intorno al diametro AB. Quindi un piano perpendicolare alla estremità di un diametro della sfera è tangente a questa sfera ; e reciprocamente ogni piano tangente alla

sfera è perpendicolare all'estremità del diametro che passa pel punto del contatto.

220. Si dice *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli. I circoli che rappresentano le sezioni dei piani medesimi colla sfera si chiamano *basi* della zona. Se uno di questi piani è tangente alla sfera, allora la zona ha una base, e con altro nome dicesi *calotta*.

221. Una zona a due basi *FMNG* può considerarsi come generata dal rivolgimento di un arco *FM* intorno al diametro *AB* che passa per i centri delle due basi. Una zona ad una base *AFG* si può considerare come prodotta dal rivolgimento di un arco *AF* intorno al diametro *AB* che passa per una delle sue estremità.

222. L' *altezza* di una zona è la distanza dei due piani paralleli, che sono le basi della zona.

223. Si chiama *segmento sferico* la porzione della sfera compresa fra due piani paralleli. Le sezioni di questi piani colla sfera sono le *basi* del segmento medesimo. Se uno dei piani paralleli fosse tangente alla sfera, allora il segmento sferico avrebbe una sola base.

224. L' *altezza* d' un segmento sferico è la distanza dei due piani paralleli che formano le basi del segmento.

225. Dicesi *settore sferico* la porzione della sfera compresa fra una calotta, ed una superficie conica, che ha per base il circolo base della calotta, e per vertice il centro della sfera.

Un settore sferico può considerarsi come prodotto dalla rotazione di un settore circolare *FAO* intorno ad uno dei suoi lati *OA*, *OF*.

Finalmente si chiama *fuso* la parte della superficie della sfera racchiusa fra due semi-circoli massimi che terminano a un diametro comune, e si dà il nome di *cuneo* o *unghia sferica* alla parte della sfera compresa fra il fuso e le sue due facce.

CAPITOLO XV.

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE DE' TRE CORPI ROTONDI, E DEI RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

226. La teorica de' tre corpi rotondi riducesi nella geometria elementare quasi tutta alla misura delle loro superficie, de' loro volumi, ed ai rapporti che ne derivano. Quindi è necessario che si conosca il principio su cui stabiliremo una siffatta misura, dappoichè i geometri nell' assegnarla hanno seguito diversi metodi, secondochè hanno giudicato essere l' uno più esatto, o più facile dell' altro. Or il principio che seguiremo consiste nel considerare il cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati; e per conseguenza il cilindro retto come un prisma retto di un numero infinito di facce, il cono retto come una piramide regolare di un numero infinito di facce, e la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce. Questa maniera di considerare il cerchio, ed i tre corpi rotondi ha il prezioso vantaggio di abbreviare le dimostrazioni, che

andiamo ad esporre, de' così detti *Teoremi di Archimede* intorno al cilindro, al cono, ed alla sfera; e di farle concepire e ritenere facilissimamente, perchè s' immedesimano, per così dire, col metodo con cui i teoremi accennati vennero scoverti da quel sommo geometra dell'antichità, il quale li dimostrò poi in altra guisa per adattarsi alla maniera di pensare de' geometri del suo tempo, i quali non si permettevano mai di adoperare la considerazione dell'infinito nelle loro dimostrazioni. E si noti ancora che quando quella maniera di considerare il cerchio, ed i tre corpi rotondi venga adoperata come si conviene, e non s'appoggi a ragionamenti vaghi ed arbitrarii, essa può riescire tanta esatta quanto qualsivoglia altro metodo, che si volesse mettere in suo luogo.

L' idea dell' infinito non è chiara sicuramente; ma l'oscurità sta nella natura del soggetto, vale a dire sta nel passaggio dalla linea retta alla curva, dalle superficie piane alle curve, che non può evitarsi allorchè si tratta della misura del cerchio, e de' tre corpi rotondi; dappoichè in tal caso devesi considerare la natura della linea circolare, o sia di una linea curva. Inoltre una siffatta oscurità s' incontra in tutta la geometria quando dalle grandezze commensurabili si deve passare alle incommensurabili; e nell' entrata della geometria stessa si ritrova nella teorica delle linee rette parallele. L' idea dell' infinito si potrà mascherare solamente, ma non si potrà mai togliere; per cui val meglio considerarla a viso aperto, e senza orpello o mistero.

PROPOSIZIONE XCII — *TEOREMA.*

227. *La superficie laterale o convessa del cilindro retto ha per misura il prodotto della circonferenza della base per l'altezza* (fig. 45).

Dim. Perocchè, se si considera la circonferenza della base *EHD* come un poligono regolare di una infinità di lati, il cilindro medesimo potrà essere considerato come un prisma retto di una infinità di facce. Or essendo rettangolari le facce di un prisma retto, la sua superficie laterale, che è la somma di tutti questi rettangoli, avrà per misura il prodotto del perimetro della base per l'altezza; per conseguenza la superficie laterale del cilindro retto dovrà essa pure avere per misura il prodotto della circonferenza della base *EHD* per l'altezza *EF. C. D. D.*

228. *Corollario.* Da ciò si deduce che la superficie convessa di un cilindro retto è eguale a quella di un rettangolo avente per base la circonferenza della base del cilindro, e per altezza quella del cilindro medesimo. Laonde tutto quello che nella geometria piana è stato dimostrato intorno ai rapporti di due rettangoli si può applicare alle superficie convesse di due cilindri retti.

PROPOSIZIONE XCIII — *TEOREMA*.

229. *Le superficie convesse di due cilindri simili stanno fra loro come i quadrati delle altezze, o come i quadrati dei raggi delle basi corrispondenti* (fig. 45.)

Dim. Infatti, essendo nei cilindri simili (n° 205) gli assi o le altezze *AB*, *ab* proporzionali ai raggi delle basi *AE*, *ae*; ed essendo i raggi proporzionali alle circonferenze *DEH*, *deh*, ne risulta che queste saranno proporzionali alle altezze, e per conseguenza saranno simili i rettangoli che rappresentano le superficie convesse dei due cilindri simili. Ma i rettangoli simili stanno come i quadrati de' lati omologhi; dunque le superficie convesse de' due cilindri stanno come i quadrati delle altezze, ovvero come i quadrati de' raggi. *C. D. D.*

230. *Scolio*. È facile vedere che nello stesso rapporto stanno le superficie totali di due cilindri simili.

PROPOSIZIONE XCIV — *TEOREMA*.

231. *La superficie convessa della piramide regolare ha per misura il prodotto del perimetro della sua base per la metà della sua apotema* (fig. 49).

Dim. Sia *SO* l'altezza della piramide regolare *SABD*. Essendo il punto *O* il centro del poligono regolare *ABCDE* (n. 90), le oblique *SA*, *SB*, *SC*, ecc. saranno ugualmente distanti dalla perpendicolare *SO*; perciò saranno isosceli ed uguali i triangoli *ASB*, *BSC*, *CSD*, ecc. che formano la superficie convessa della piramide regolare. Ma ciascuno di questi triangoli, per esempio *ASB*, ha per misura il prodotto della sua base *AB* per la metà della sua altezza *SH*, che è l'apotema della piramide, dunque la snperficie convessa di questa avrà per misura il prodotto del perimetro *ABCDE* per la metà di *SH*. *C. D. D.*

232. *Scolio*. È facile ora vedere che se si taglia la piramide regolare *SABD* con un piano *abce* parallelo alla base, la superficie convessa del tronco di piramide regolare, che è composta dei trapezj *Ab*, *Bc*, *Cd*, ecc. avrà per misura la porzione *Hh* dell'apotema *SH* moltiplicata per la semisomma dei perimetri delle due basi del tronco piramidale.

PROPOSIZIONE XCV — *TEOREMA*.

233. *La superficie convessa del cono retto ha per misura il prodotto della circonferenza della sua base per la metà del suo lato* (fig. 46).

Dim. Infatti, se si consideri il cerchio *ANB* come un poligono

regolare di un numero infinito di lati, il cono $SANB$ potrà considerarsi come una piramide regolare di un numero infinito di facce; per conseguenza la superficie convessa del cono retto avrà per misura la circonferenza della sua base moltiplicata per la metà di un lato SA. *C. D. D.*

234. *Corollario* I. Da ciò si deduce che la superficie convessa di un cono retto è equivalente all'aja di un triangolo rettangolo, di cui un cateto rappresenta la circonferenza della base del cono, e l'altro il lato del cono medesimo. Quindi si potrà applicare alle superficie convesse dei coni retti quanto si è dimostrato intorno ai rapporti delle aje dei triangoli.

235. *Corollario* II. Pel punto di mezzo E del lato SA si conduca un piano parallelo alla base del cono. E poichè le circonferenze stanno come i raggi, le circonferenze ANB, EMD staranno come i raggi AO, EK; ma AO è doppio di EK perchè SA è doppio di SE, dunque la circonferenza della base del cono è doppia di quella della sezione, per conseguenza:

La superficie convessa di un cono retto ha per misura il prodotto del suo lato per la circonferenza della sezione equidistante dal vertice e dalla base.

236. *Corollario* III. Pel punto E s'innalzi sopra SA una perpendicolare che si prolunghi finchè incontri l'asse del cono nel punto H. I due triangoli SAO, SEK sono simili, perchè rettangoli ed aventi inoltre un angolo S di comune, onde si avrà.

$$SA : SO :: EH : EK.$$

Considerando EH, ed EK come raggi di due cerchi, le circonferenze di questi staranno fra loro come i raggi medesimi, ovvero come SA a SO. Laonde il prodotto della circonferenza EK pel lato SA del cono sarà uguale al prodotto della circonferenza EH per l'asse SO del cono medesimo; e perciò ne risulta che

La superficie convessa di un cono retto ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza, che ha il raggio uguale alla perpendicolare innalzata sopra un lato del cono dal punto di mezzo di questo lato, e terminata all'asse.

PROPOSIZIONE XCVI — TEOREMA.

237. *Le superficie convesse di due coni retti simili stanno fra loro come i quadrati delle altezze, o come i quadrati dei raggi delle basi corrispondenti* (fig. 46).

Dim. Infatti, essendo le altezze SO, so proporzionali ai raggi AO, ao, saranno simili i triangoli rettangoli SAO, sao; e perciò i lati SA, sa saranno proporzionali ai raggi AO, ao, ovvero alle circonferenze ANB, anb. Quindi risulteranno simili i triangoli rettangoli che rappresentano le superficie convesse de' due coni. Ma i triangoli simili stanno come i quadrati dei lati omologhi, dunque le superficie accennate stanno come i quadrati dei lati SA, sa, e per

conseguenza come i quadrati delle altezze SO, so, o dei raggi AO, ao. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE XCVII. — *TEOREMA.*

238. *La superficie convessa del tronco di cono retto ha per misura il prodotto del lato per la semisomma delle circoferenze delle basi* (fig. 47).

Dim. Sia il tronco di cono $ABGH$. Considerando le basi come poligoni regolari di un numero infinito di lati, ne segue che il tronco proposto potrà considerarsi come un tronco di piramide regolare di un numero infinito di facce, e per conseguenza la superfiicie convessa del tronco di cono retto avrà per misura il prodotto del lato AH per la semisomma delle circonferenze delle due basi. *C. D. D.*

239. *Corollaio* I. Nel trapezio $AHGB$ la linea EF che unisce i punti di mezzo dei lati non paralleli è uguale alla semisomma delle basi AB, HG, come si è dimostrato nella geometria piana; per conseguenza la circonferenza EMF sarà uguale alla semisomma delle circonferenze delle basi del tronco. Laonde: *la superficie convessa del tronco di cono retto ha per misura il prodotto del suo lato per la circonferenza di una sezione equidistante dalle due basi.*

240. *Corollario* II. Si abbassi dal punto H la perpendicolare HP sopra AB, e pel punto E si conduca ad AH una perpendicolare, che si prolunghi finchè incontri l'asse DO del tronco nel punto R. I triangoli AHP, ECR sono simili, poichè hanno i lati rispettivamente perpendicolari, per cui si ha

$$HA : HP :: ER : EC.$$

Se dunque si considerano ER, EC come raggi di due cerchi, in luogo di questi raggi si potranno mettere nella proporzione accennata le circonferenze dei cerchi medesimi; e perciò il prodotto della circonferenza EC pel lato HA sarà uguale al prodotto della circonferenza ER per HP, ovvero per l'asse DO. Ma il primo prodotto è la misura della superficie convessa del tronco di cono (n° 239), dunque

La superficie convessa del tronco di cono retto ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza di raggio uguale alla perpendicolare innalzata sul mezzo di un lato del tronco, e terminata all'asse.

PROPOSIZIONE XCVIII — *LEMMA.*

241. *Sieno* AB, BC, CD, *più lati successivi di un poligono regolare,* O *il suo centro, ed* OI *il raggio del cerchio iscritto. Se si supponga che la porzione di poligono* ABCD *situata da una medesima parte dell'asse* FG *giri intorno a questo, la superficie del solido prodotto dal rivolgimento del poligono avrà per misura la porzione dell'asse* MQ *moltiplicata per la circonferenza del cerchio iscritto* (fig. 50).

Dim. Dai punti *A*, *B*, *C*, *D* si abbassino sull'asse le perpendicolari *AM*, *BN*, *CP*, *DQ*; indi dal centro *O* si conducano sopra i lati *AB*, *BC* le perpendicolari *OI*, *OL*. che saranno raggi del cerchio iscritto. Ciò premesso, il trapezio *ABMN* girando intorno all' asse produce un tronco di cono retto, di cui la superficie convessa ha per misura il prodotto dell'altezza *MN* per la circonferenza che ha *OI* per raggio (n° 240). Parimente si dimostra che la superficie convessa del tronco di cono, o del cilindro prodotta dal rivolgimento della figura *BCPN* intorno all'asse ha per misura il prodotto di *NP* per la circonferenza *OL*, ovvero *OI*, e lo stesso si può dire della superficie convessa del tronco generato dalla rotazione del trapezio *CDQP*. Quindi la somma di queste superficie avrà per misura la porzione *MQ* dell' asse per la circonferenza del cerchio iscritto. *C. D. D.*

242. *Corollario*. Se il poligono intero è di un numero pari di lati, l'asse *FG* passerà per due vertici di esso opposti *F*, e *G*, la superficie intera descritta dal poligono *FACG* avrà per misura il prodotto dell'asse *FG* per la circonferenza del cerchio iscritto. Infatti, in tal caso è manifesto che la superficie convessa del cono descritto dal triangolo *FAM* nel suo rivolgimento intorno all' asse, avrà per misura il prodotto di *FM* per la circonferenza *KO* del cerchio iscritto, e lo stesso dicasi del cono descritto dal triangolo *DQG*.

PROPOSIZIONE XCVIX — *TEOREMA*.

243. *La superficie della sfera ha per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo pel diametro* (fig. 51).

Dim. Infatti, se si consideri il semicerchio *ABD* come un semipoligono regolare di un numero infinito di lati, la superficie descritta da questo poligono non sarà altro che la superficie sferica, ed il raggio del cerchio iscritto sarà il raggio della sfera; per conseguenza in virtù della proposizione precedente la superficie della sfera avrà per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo pel diametro. *C. D. D.*

244. *Scolio*. Collo stesso ragionamento si dimostrerà facilmente che la calotta generata dal rivolgimento dell'arco *AB* intorno al diametro *AD*, e la zona a due basi prodotta dal rivolgimento dell'arco *BC* intorno allo stesso diametro, hanno ciascuna per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo per l'altezza *AE* nel primo caso, ed *EF* nel secondo.

245; *Corollario* I. Un circolo massimo della sfera avendo per misura la sua circonferenza moltiplicata per la metà del raggio della sfera; ed essendo il diametro quadruplo della metà del raggio, ne segue che

La superficie della sfera è quadrupla di un suo circolo massimo.

246. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che

Le superficie delle sfere stanno fra loro come i quadrati dei rag-

gi o dei diametri; dappoichè i cerchi stanno come i quadrati dei raggi o dei diametri.

247. *Corollario* III. Una zona qualunque stà alla superficie della sfera come l'altezza di questa zona al diametro della sfera medesima. Or essendo la corda *AB* media proporzionale fra il diametro *AD* ed il segmento adiacente *AE*, dalla proprietà della proporzione continua ne risulta che il diametro *AD* sta ad *AE* come il quadrato di *AD* al quadrato di *AB*. Quindi la superficie della sfera sta alla calotta come il quadrato il *AD* al quadrato di *AB*, ovvero come un circolo massimo al circolo che ha per diametro *AB*. E poichè la superficie sferica è quadrupla di un suo circolo massimo, così pure la calotta sarà quadrupla del circolo che ha per diametro la corda *AB* dell'arco generatore; e però equivalente al circolo che ha per raggio la corda medesima.

CAPITOLO XVI.

DELLA MISURA DELLE SOLIDITA', O VOLUMI DEI TRE CORPI ROTONDI, E DEI RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

248. Stabilita la misura delle superficie dei tre corpi rotondi si conosce subito la via da tenersi per arrivare alla misura dei loro volumi; nondimeno la misura del volume della sfera offre qualche difficoltà, allorchè si vuole determinarlo partendo dal principio fondamentale, cioè quello di considerare la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce, senza deviare in certe forme di ragionamento vaghe ed inesatte, cui si dà impropriamente il nome di metodo degl'infinitamente piccoli.

PROPOSIZIONE C — *TEOREMA.*

249. *Il cilindro retto ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Dim. Infatti, considerando il cilindro retto come un prisma retto di un numero infinito di facce, la proposizione enunciata diviene evidente; dappoichè il prisma ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza. *C. D. D.*

250. *Corollario* I. Ciò che altrove si è detto intorno ai rapporti di due prismi si applica ancora ai rapporti di due cilindri.

251. *Corollario* II. *I cilindri simili stanno come i cubi degli assi o dei diametri delle basi.*

Infatti, la ragione di due cilindri in generale è composta della ragione delle basi e di quella delle altezze, ovvero della ragione de' quadrati de' diametri delle basi e della ragione delle altezze; ma quando i cilindri sono simili la ragione delle altezze è uguale a quella dei diametri, dunque i cilindri simili sono in ragion triplicata

delle loro altezze o dei diametri delle loro basi, ossia sono come i cubi delle altezze, o de' diametri medesimi, o anche dei raggi delle basi.

PROPOSIZIONE CI — *TEOREMA*.

252. *Il cono retto ha per misura il prodotto della base pel terzo dell'altezza.*

Dim. Infatti, il cono retto si può considerare come una piramide regolare di un numero infinito di facce; ma questa ha per misura il prodotto della base pel terzo dell'altezza, dunque il cono retto avrà ancora per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza. *C. D. D.*

253. *Corollario* I. Ciò che altrove si è dimostrato intorno ai rapporti delle piramidi fra loro, e delle piramidi paragonate ai prismi si può applicare ai rapporti dei coni fra loro, e dei coni paragonati ai cilindri, fra i quali merita di esser ricordato il teorema dimostrato da Eudosso, cioè che il cono retto è la terza parte del cilindro retto della stessa base e della stessa altezza.

254. *Corollario* II. I coni simili stanno come i cubi delle loro altezze, o come i cubi dei diametri delle loro basi. La dimostrazione è come quella fatta per i cilindri simili.

PROPOSIZIONE CII — *TEOREMA*.

255. *Il tronco di cono retto a basi parallele è uguale alla somma di tre coni, che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e per base l'uno la base inferiore, l'altro la base superiore, ed il terzo una media proporzionale fra le due basi.*

Dim. Infatti, il tronco di cono retto a basi parallele si può considerare come un tronco di piramide regolare a basi parallele di un numero infinito di facce; ma il tronco di piramide si divide in tre piramidi che hanno le condizioni enunciate nella proposizione, dunque il tronco di cono si dividerà pure in tre coni che hanno le stesse condizioni. *C. D. D.*

256. *Corollario.* Da ciò ne segue che il tronco di cono retto si misura come il tronco di piramide.

PROPOSIZIONE LVI — *LEMMA*.

257. *La sfera può esser considerata come un poliedro di un numero infinito di facce* (fig. 52).

Dim. Sia *A* il centro della sfera; e per questo punto si faccia passare un piano *ABK* che tagli la sfera; indi nel circolo massimo risultante dalla sezione s' iscriva un poligono regolare, di cui un lato

sia BK; si tirino i raggi BA, KA, ed al punto A s' innalzi sul piano ABK la perpendicolare AC che si prolunghi finchè incontri la superficie sferica in un punto C. Ciò premesso, per i tre punti C, B, A si faccia passare un piano, come pure per i tre punti C, K, A, ne risulteranno gli archi di cerchio massimo CB, CK, ciascuno de'quali sarà un quadrante. S' iscrivano in questi due quadranti due porzioni di poligoni regolari perfettamente eguali: si conducano le rette OS, FR; dai punti O, S si abbassino sopra AB, ed AK le perpendicolari OV, SQ, e si unisca VQ.

Essendo i quadranti CAB, CAK eguali fra loro, ed identiche le costruzioni in essi eseguite, è chiaro che sarà $OV = SQ$, e $VB = QK$. Ma OV, SQ sono anche parallele, perchè ambedue parallele ad AC, dunque $OVSQ$ è un parallelogrammo. Da un' altra parte, poichè $VB = QK$, e quindi $AV = AQ$, anche BK sarà parallela a VQ; e però le rette BK, OK parallele alla terza VQ risulteranno parallele, ed il quadrilatero $OSBK$ sarà una figura piana. Lo stesso si dimostrerà facilmente per qualunque altro quadrilatero iscritto $FOSR$, poichè in quanto al triangolo CFR esso è sempre in un piano. Se dunque si congiungano i punti O, S, F, R col centro A della sfera, si sarà iscritto nel solido $BACK$ un poliedro composto di piramidi che hanno per basi i quadrilateri $OBKS$, $OFRS$...., ed il triangolo CFR, e per vertice comune il punto A. Facendo lo stesso per tutte le mezze ugne sferiche, si troverà iscritto nella sfera un poliedro, il quale potrà avere un numero di facce illimitato. Infatti, a misura che si raddoppia il numero de' lati de' poligoni regolari, di cui più sopra si è parlato, si viene ancora a raddoppiare il numero delle facce del poliedro; e poichè un siffatto raddoppiamento non ha alcun limite, così diviene manifesto che il numero delle facce del poliedro iscritto alla sfera può farsi tanto grande che si vuole. Quindi, allorchè i poligoni accennati avranno un numero infinito di lati, ossia si confonderanno con i circoli massimi, il poliedro iscritto avrà un numero infinito di facce, e si confonderà colla sfera, la quale in conseguenza si può considerare come un poliedro di un numero infinito di facce. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE CIV — *TEOREMA.*

258. *La sfera ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio.*

Dim. Per la proposizione precedente si può considerare la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce, ciascuna delle quali potrà considerarsi come base di una piramide che ha il vertice al centro della sfera. Quindi la sfera è la riunione di una infinità di piramidi, delle quali le basi compongono la superficie sferica, e l'altezza di ciascuna è uguale al raggio. Ma ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza,

dunque la sfera avrà per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio. *C. D D.*

259. *Corollario* I. Dal teorema precedente si deduce che la sfera è equivalente ad un cono, di cui la base è il quadruplo di un cerchio massimo, e l'altezza è uguale al raggio della sfera.

260. *Corollario* II. *Le sfere stanno fra loro come i cubi dei raggi. o dei diametri.*

Infatti, le sfere stanno in ragion composta dalla ragione delle loro superficie, e dalla ragione dei raggi. Ma la prima ragione è duplicata di quella dei raggi, dunque le sfere stanno in ragion triplicata degli stessi raggi, ovvero come i cubi dei raggi, o dei diametri.

PROPOSIZIONE CV — *TEOREMA.*

261. *Il settore sferico ha per misura il prodotto della zona che gli serve di base pel terzo del raggio* (fig. 53).

Dim. Perocchè, in virtù del lemma precedente (n° 257) il settore sferico, generato dal rivolgimento del settore circolare ABO intorno al diametro AD, può considerarsi composto di una infinità di piramidi, delle quali le basi formano la calotta descritta dall'arco AB, e l'altezza comune è uguale al raggio. Quindi il settore sferico avrà per misura il prodotto della calotta pel terzo del raggio. *C. D. D.*

262. *Corollario* I. Essendosi dimostrato (n° 247) che la calotta descritta dall'arco AB,(fig. 54) è equivalente al circolo che ha per raggio la corda AB, il settore sferico descritto dal settore circolare ABO sarà equivalente al cono che ha per altezza il raggio AO della sfera, e per base un cerchio, di cui il raggio è uguale alla corda AB dell'arco generatore della calotta che serve di base al settore.

Se il settore sferico fosse descritto dal settore circolare BCO maggiore del quadrante, esso sarebbe equivalente al cono che ha per altezza il raggio OC della sfera, e per base il cerchio, di cui il raggio è uguale alla corda BC dell'arco generatore della calotta che serve di base al settore.

263. *Corollario* II. Essendo il quadrato di AB uguale ai quadrati di AE, EB, il cerchio che ha per raggio AB sarà uguale ai cerchi, che hanno per raggi AE, EB; per conseguenza il cono che ha per base il cerchio di raggio AB, e per altezza AO, ovvero il settore sferico prodotto dal rivolgimento del settore circolare ABO, sarà uguale alla somma di due coni, che hanno la medesima altezza AO, e per basi i cerchi dei raggi AE, EB.

PROPOSIZIONE CVI — *TEOREMA.*

264. *Il segmento sferico ad una base è equivalente al cono, che ha per base il cerchio, di cui il raggio è l'altezza del segmento, e per asse la rimanente parte del diametro accresciuta del raggio* (fig. 54).

Dim. Si consideri il segmento sferico generato dal rivolgimento del mezzo segmento circolare *ABE* intorno ad *AE*. Essendo il settore sferico generato dal settore circolare *ABO* uguale alla somma di due coni, che hanno per basi i cerchi de' raggi *AE*, *EB*, e per altezza *AO* (n° 163), se si tolga di comune il cono prodotto dal rivolgimento del triangolo *BEO* intorno ad *EO*, il segmento sferico proposto sarà uguale alla somma di due coni, de' quali il primo ha per base il cerchio di raggio *AE*; e per altezza *AO*, ed il secondo ha per base il cerchio di raggio *BE*, e per altezza *AE*; poichè il cono che ha per base il cerchio di raggio *BE*, e per altezza *AO* è uguale alla somma dei due coni che hanno per base il cerchio accennato, e per altezza le rette *AE*, *EO*. Or essendo *BE* media proporzionale fra i due segmenti *AE*, *EC* del diametro, il quadrato di *AE* starà al quadrato di *BE* come *AE* ad *EC*. Quindi il cerchio di raggio *AE* starà al cerchio di raggio *BE* come *AE* ad *EC*, e facendo in questa proporzione il prodotto degli estremi e quello dei medii, ne risulterà che il cono il quale ha per base il primo di quelli cerchi, e per altezza *EC* sarà equivalente al cono che ha per base il secondo cerchio, e per altezza *AE*. Dalle cose fin qui esposte si deduce che il segmento sferico proposto è uguale alla somma di due coni, dei quali ciascuno ha per base il cerchio di raggio *AE*, ma il primo ha per altezza *AO*, ed il secondo *EC*; e per conseguenza il segmento medesimo sarà equivalente al cono che ha per base il cerchio, di cui il raggio è l' altezza *AE* del segmento, e per asse la rimanente parte *EC* del diametro accresciuto del raggio *AO*. *C. D. D.*

265. *Scolio* I. Se il segmento sferico ad una base fosse maggiore dell' emisfero, come sarebbe quello prodotto dal rivolgimento del mezzo segmento circolare *EBC* intorno ad *EC*, avrebbe luogo la stessa dimostrazione fatta qui sopra, solamente in vece di sottrarre il cono generato dal triangolo *BEO*, si deve aggiungere al settore sferico generato dal settore circolare *CBO*.

266. *Scolio* II. Se il segmento sferico avesse due basi, come quello descritto dalla porzione di cerchio *BCFE* (fig. 53) si otterrà il suo volume osservando che esso è sempre la differenza di due segmenti sferici, dei quali ciascuno ha una sola base, come sarebbero i segmenti sferici descritti dai mezzi segmenti circolari *ACF*, *ABE*.

267. *Scolio* III. Merita ancora di essere osservato che

Il volume di un segmento sferico ad una base ha per misura il prodotto del cerchio, che avrebbe per raggio l'altezza di questo segmento, pel raggio della sfera diminuito del terzo di quella altezza.

Questa espressione del volume del segmento sferico equivale a quella data nel teorema precedente. Infatti, la porzione *EC* del diametro *AC* (fig. 54) coll' aggiunta del raggio *AO* equivale a tre volte il raggio *AO* meno l' altezza *AE* del segmento ; per conseguenza il cono che ha per base il cerchio di raggio *AE*, e per asse la rimanente porzione *EC* del diametro con l'aggiunta del raggio *AO*, avrà per misura il cerchio di raggio *AE* moltiplicato pel raggio *AO* diminuito del terzo di *AE*.

CAPITOLO XVII.

DELLE RAGIONI, CHE HA LA SFERA COL CILINDRO, E COL CONO AD ESSA CIRCOSCRITTI.

PROPOSIZIONE CVII — *TEOREMA*.

268. ***Il cilindro retto sta alla sfera cui è circoscritto come 6: 4, tanto rispetto alla superficie totale, quanto alla solidità*** (fig. 55).

Dim. Sia ***DFPE*** un quadrato circoscritto al circolo ***AGBH*** ; i diametri ***AB***, ***GH*** saranno l' uno perpendicolare all'altro ; e dal simultaneo rivolgimento del semicircolo ***AGB*** , e del semiquadrato ***ADEB*** intorno ad ***AB*** si produrrà una sfera , ed un cilindro retto ad essa circoscritto, il quale ha le basi uguali a due circoli massimi della sfera medesima ; poichè il diametro ***EP***, o ***DF*** di ciascuna di queste basi è uguale al diametro ***GH*** della sfera. Da ciò si deduce che la supérficie convessa del cilindro circoscritto alla sfera è uguale alla superficie di questa sfera , essendo l' una e l' altra espressa dal prodotto della circonferenza di un circolo massimo per l' asse ***AB***. Ma la superficie della sfera equivale a quattro circoli massimi (n° 245), dunque se alla superficie convessa del cilindro si uniscono le due basi, la superficie totale del cilindro sarà uguale a sei circoli massimi ; e però la superficie del cilindro circoscritto starà a quella della sfera come 6 : 4.

Venendo ora alle solidità, si osservi che il cilindro ha per misura il prodotto della base, che è un cerchio massimo, pel diametro ***AB***, ovvero per 6/3 del raggio ***CB***; e che la sfera ha per misura la sua superficie moltiplicata per 1/3 dello stesso raggio; il che equivale al prodotto di un cerchio massimo per 4/3 del raggio, essendo la superficie sferica uguale a quattro circoli massimi. Laonde il cilindro starà alla sfera come 6/3 a 4/3, ossia come 6 : 4. *C. D. D.*

269. ***Scolio*** I. Dal teorema precedente apparisce che nei due solidi, cioè il cilindro retto circoscritto alla sfera e la sfera, i volumi stanno fra loro come le superficie totali. Archimede apprezzò a tal segno questa sua scoperta da volere che in vece del proprio nome si scolpisse sulla sua tomba un cilindro circoscritto alla sfera.

270. ***Scolio*** II. Merita ancora di essere osservato che se il cilindro e la sfera si segano con piani perpendicolari all' asse ***AB***, i singoli segmenti della superficie convessa del cilindro saranno equivalenti ai singoli segmenti della superficie sferica. Così, per esempio, la calotta generata dal rivolgimento del mezzo segmento circolare ***Bor*** intorno a ***Br*** è equivalente alla superficie convessa del cilindro generato dal rettangolo ***EBrm***; dappoichè hanno la stessa misura , cioè la circonferenza di un circolo massimo per l' altezza ***Br***.

PROPOSIZIONE CVIII — *TEOREMA.*

271. *Il cono sta alla sfera cui è circoscritto come 9: 4, tanto rispetto alla superficie totale, quanto alla solidità* (fig. 56).

Dim. Sia SAD un triangolo equilatero circoscritto al cerchio EBF, nel simultaneo rivolgimento del semicircolo EBH, e del triangolo SBA intorno a SB, si avrà un cono retto circoscritto ad una sfera. Or se si congiunga il punto A col centro C, la retta AC dividerà in due parti uguali l'angolo formato dalle due tangenti AE, AB; ma la retta SB divide ancora per metà l'angolo ESF, dunque i due triangoli SAB, ACB sono equiangoli; e perciò simili, e si avrà

$$SA : AB : : AC : CB.$$

Laonde essendo SA doppia di AB, sarà ancora AC doppia del raggio CB; e per conseguenza il quadrato di AC risulterà quadruplo del quadrato di CB. Ma da un' altra parte il quadrato di AC è uguale ai quadrati di AB, CB; poichè è retto l'angolo ABC, dunque il quadrato di AB è triplo del quadrato di CB; e perciò il cerchio che serve di base al cono sarà triplo di un cerchio massimo.

Ciò premesso, si osservi che la superficie convessa del cono ha per misura la circonferenza della base per AE, che è la metà del lato SA del cono, ovvero ha per misura la circonferenza della base pel raggio AB della base medesima; per conseguenza la superficie convessa del cono sarà doppia di quella base, la quale essendo uguale a tre cerchi massimi, ne risulterà infine che la superficie convessa del cono è uguale a sei cerchi massimi, e perciò la superficie totale del cono sarà uguale a nove cerchi massimi. Laonde la superficie totale del cono starà a quella della sfera come 9 : 4.

Lo stesso rapporto sussiste per i volumi. Infatti, il cono ha per misura la sua base pel terzo della sua altezza SB, ovvero ha per misura il prodotto di tre cerchi massimi pel raggio CB, oppure di un cerchio massimo per 9/3 del raggio CB. Ma la sfera ha per misura la sua superficie pel terzo del raggio CB, ovvero quattro cerchi massimi pel terzo del raggio CB, o infine un cerchio massimo per 4/3 del raggio CB, dunque il cono sta alla sfera come 9/3 a 4/3, ossia come 9 : 4. *C. D. D.*

272. *Scolio* I. Dalle due proposizioni precedenti si deduce che il cilindro circoscritto alla sfera è medio proporzionale fra la sfera ed il cono ad essa circoscritto, tanto rispetto alla superficie, quanto alla solidità perchè i tre numeri 9, 6, e 4 formano una proporzione continua. Osservando che il lato del quadrato iscritto al cerchio sta al raggio come la radice di 2 sta all'unità; e che il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice di 3 sta all'unità, si potrebbe dimostrare che il rapporto sopraccennato ha ancora luogo pel cilindro e pel cono iscritto; ma non possiamo qui occuparci di questa dimostrazione.

273. *Scolio* II. Si è visto (n° 257) come può iscriversi in una sfera un poliedro per mezzo di un poligono regolare. Or è manifesto che

si potrebbe concepire un poliedro simile di cui tutte le facce fossero tangenti alla sfera; in tal caso il poliedro accennato potrà considerarsi come composto di piramidi aventi per altezza comune il raggio della sfera, e per basi le differenti facce del poliedro. Quindi il volume del poliedro medesimo si avrà con moltiplicare la sua superficie pel terzo del raggio della sfera iscritta; ma questa ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del raggio, dunque le solidità dei poliedri circoscritti alla sfera stanno tra loro ed alla solidità della sfera come le superficie di questi medesimi solidi, e per conseguenza la proprietà dimostrata (n° 268) pel cilindro circoscritto alla sfera appartiene ad una infinità di altri solidi. Infine giova osservare che siffatta proprietà è analoga a quella che hanno i poligoni circoscritti ad uno stesso cerchio; poichè le aje di questi poligoni stanno come i loro perimetri.

CAPITOLO XVIII.

DEI TRIANGOLI SFERICI

274. *Triangolo sferico* (fig. 57) dicesi la parte della superficie della sfera compresa fra tre archi di tre circoli massimi AB, AC, BC.

275. I *lati* di un triangolo sferico sono gli archi che formano il suo perimetro. Gli *angoli* poi sono gli angoli dei piani in cui si trovano i loro lati.

276. Dalla definizione precedente consegue che un angolo di un triangolo sferico sarà retto, o acuto, o ottuso, secondo la specie dell' angolo diedro formato dai due piani, ne' quali si trovano i suoi lati. E poichè un angolo diedro è misurato dall' angolo piano, che formano le due perpendicolari condotte sopra lo spigolo da un medesimo punto di questo, l' una in una faccia, e l' altra nell' altra, perciò un angolo di un triangolo sferico sarà misurato dall'angolo compreso fra le due rette condotte pel vertice rispettivamente tangenti ai suoi lati.

277. Se si congiungono i tre vertici A, B, C, col centro S della sfera per mezzo dei raggi AS, BS, CS, si formerà un angolo triedro $SABC$ che avrà questo centro per vertice. I suoi angoli diedri saranno precisamente gli angoli del triangolo sferico ABC, ed i suoi angoli piani avranno per misura i lati di questo triangolo, poichè questi lati si possono considerare come descritti col centro comune in S, e collo stesso raggio. Quindi tutte le quistioni relative alla comparazione dei triangoli sferici si riducono a quistioni relative alla comparazione degli angoli triedri. Reciprocamente le proposizioni spettanti agli angoli triedri si applicano ai triangoli sferici con un semplice cangiamento di nomi; dicendo *lati* in luogo di *angoli piani* ed *angoli* in luogo di *angoli diedri*.

278. Abbenchè si possano concepire descritti sulla superficie della sfera triangoli formati da tre archi di tre circoli minori; pure di questi non si fa parola negli elementi di geometria, perchè essendo

disuguali i circoli minori, i loro archi non hanno una costante curvatura, come avviene negli archi de' circoli massimi. Oltracciò ***un arco* DL *di circolo massimo minore della semicirconferenza è la minima distanza sulla superficie sferica tra i due punti* D**, e L. (fig. 48.)

Infatti, il piano di questo arco divide la sfera in due emisferi; e perciò se al di sopra del piano *DLC* esistesse una distanza minore dell' arco *DL*, dovrebbe esistere una simile distanza anche al disotto del piano accennato, poichè rispetto a questo piano la condizione de' due emisferi è *identica*; ed allora tra i punti *D*, e *L* vi sarebbero due minime distanze; il che non può sussistere.

Quindi essendo l' arco di circolo massimo la misura di ogni distanza sferica, anche per questa ragione si adoperano i soli archi di circoli massimi per lati de' triangoli sferici.

279. Se nel centro di una sfera si situano due angoli triedri supplementarj (n° 69), i triangoli sferici, determinati dalle intersezioni delle facce di questi angoli colla superficie sferica, si dicono *triangoli supplementarj*. Quindi si vede che ogni triangolo sferico ha il suo supplementario, cioè che ad ogni triangolo sferico corrisponde un altro di cui i lati, e gli angoli sono rispettivamente supplementi degli angoli, e lati del primo.

280. Se in un triangolo sferico *ABC* (fig. 25), si uniscano i tre vertici *A*, *B*, *C* col centro *S* della sfera, e si prolunghino i raggi *AS*, *BS*, *CS* finchè incontrino di nuovo la superficie della sfera nei punti *A' B' C'*; indi si conducano gli archi di circoli massimi *A'C'*, *A'B'*, *B'C'*; il triangolo *A'B'C'* sarà simmetrico al triangolo *ABC*. Infatti, gli angoli triedri *SABC*, *SA'B'C'* sono simmetrici (n° 74), ossia hanno i loro elementi uguali due a due senza poter coincidere; perciò lo stesso deve aver luogo per i triangoli *ABC*, *A'B'C'*. Quindi due triangoli sferici sono ***simmetrici***, quando essendo descritti sopra una stessa sfera, o sopra sfere uguali, gli angoli triedri corrispondenti sono simmetrici.

281. E poichè un angolo triedro non può avere che un solo simmetrico, così ne risulta che un triangolo sferico non può avere che un solo triangolo simmetrico. Finalmente è manifesto che nei triangoli sferici isosceli non si dà uguaglianza per simmetria, ma sempre uguaglianza propriamente detta, vale a dire che se due triangoli sferici isosceli sono uguali, l'uno potrà coincidere coll'altro.

282. Il *polo* di un circolo della sfera è un punto della superficie sferica, il quale è ugualmente distante da tutti i punti della circonferenza di questo cerchio.

283. Il diametro della sfera, il quale è perpendicolare al piano di un circolo massimo, dicesi *asse* dello stesso circolo.

284. È facile ora vedere che le estremità *A*, e *B* (fig. 48) dell'asse del circolo massimo *DLC* sono i poli non solo dello stesso circolo, ma ancora di tutti i circoli minori, come *MKN*, ad esso paralleli.

Infatti, essendo *AO* perpendicolare al piano *DLC*, le corde *AD*, *AL*, *AC*, ecc. saranno uguali come oblique che si allontanano ugual-

mente dalla perpendicolare; e perciò saranno uguali gli archi AD, AL, AC, ecc. Lo stesso si verifica per gli archi BD, BL, BC,ecc.: per conseguenza i punti A, e B sono i poli del circolo massimo DLC, in secondo luogo, essendo AO perpendicolare al piano DCL, sarà pure perpendicolare al piano MKN ad esso parallelo; e però dovrà passare pel centro E di questo cerchio (nº 216). Se dunque si tirino le corde AM, AK, AN, ecc., queste saranno uguali; come pure gli archi sottesi da queste corde. Laonde il punto A è polo del circolo minore MKN, e lo stesso potrà dimostrarsi pel punto B.

285. Dalle cose precedenti risulta manifesto che due circoli massimi non possono avere uno stesso polo; dappoichè congiungendo questo polo col centro comune, la retta congiungente sarebbe perpendicolare in uno stesso punto a due piani diversi; il che non può sussistere. Oltre a ciò, è evidente che se per i poli di un circolo massimo DCL si faccia passare un altro circolo ALB, ciascuno degli archi AL, BL sarà un quadrante; ed il suo piano sarà perpendicolare al piano CDL. Quindi il triangolo sferico ADL ha due angoli retti, cioè gli angoli LDA, DLA; che perciò sarà un triangolo sferico *birettangolo*, Or se si suppone che l'arco DL sia esso pure un quadrante,l'angolo DOL sarebbe retto; ma quest'angolo misura l'angolo formato dai due piani LOA, DOA, dunque l'angolo DAL del triangolo sferico sarebbe ancora retto, ed il triangolo sferico accennato sarebbe *trirettangolo*.

Da ciò si deduce che la supèrficie della sfera si può decomporre in otto triangoli sferici trirettangoli. Se ne deduce ancora che un angolo sferico DAL ha per misura l'arco DL compreso fra i suoi lati, e descritto dal suo vertice A come polo alla distanza di un quadrante.

286. Per le proprietà dei poli riesce agevole descrivere sulla superficie della sfera archi di cerchio come sopra un piano. Infatti, se si ponga la punta di un compasso in A, e con un dato intervallo AF si faccia girare il compasso intorno ad A, la seconda punta descriverà la circonferenza FPG. Se l'intervallo è uguale al quadrante AD, in tal caso si descriverà la circonferenza del circolo massimo DLC.

287. Volendosi descrivere su la superficie della sfera un arco di circolo massimo che passi per due punti dati D,e L,basterà trovare il polo dell'arco accennato. A tal uopo, da ciascuno dei punti D, L come poli, e coll'intervallo di un quadrante si descrivano sopra la superficie sferica due archi che si taglieranno in un punto A;gli archi AD, AL saranno quadranti; e perciò gli angoli AOD,AOL saranno retti,la retta AO sarà perpendicolare al piano DOL,ed il punto A sarà il polo del circolo massimo DLC che passa per i due punti dati D, e L. Se dunque col punto A come polo, e coll'intervallo di un quadrante si descriva un arco, questo passerà per i punti D, e L.

288 In virtù delle stesse proprietà dei poli, da un punto P dato su la superficie della sfera si potrebbe condurre un arco di circolo massimo perpendicolare ad un arco dato DL. Ciò si otterrà descrivendo dal punto P come polo, e con un quadrante come intervallo, un arco che taglierà l'arco DL, prolungato se occorra, in un punto

C; indi da questo punto come polo, e collo stesso intervallo, si descriverà l'arco PL che sarà l'arco richiesto. Infatti, essendo CL un quadrante, l'angolo CLA sarà retto (n° 285) ; e per conseguenza l'arco PL sarà perpendicolare all'arco DL.

289. Per tre punti A, B, C situati sulla superficie sferica può sempre passare una circonferenza di cerchio. Imperocchè, si facciano passare per questi punti gli archi di circolo massimo AB, BC; indi si divida ciascun arco in due parti uguali, e per i punti di mezzo si conducano archi di circoli massimi perpendicolari agli archi AB, BC, il loro punto d' incontro sulla superficie sferica sarà ugualmente distante da' tre punti dati A, B, C, come è facile vedere per l'uguaglianza de' triangoli rettangoli che ne risultano. Se dunque si prenda per polo il punto d'incontro accennato, e per intervallo una di quelle distanze si potrà descrivere una circonferenza che passerà per i tre punti dati. Ciò premesso, il circolo che passa per i tre vertici A, B, C del triangolo sferico (fig. 57) è sempre un circolo minore. Infatti, se fosse un circolo massimo, l'arco AB si dovrebbe confondere con la circonferenza di questo circolo, poichè per due punti A, e B non può passare che un solo circolo massimo. Lo stesso avrebbe luogo per gli archi AC, BC ; e per conseguenza il triangolo ABC si troverebbe cangiato in un arco di circolo massimo; il che non può sussistere.

290. Se si prolunghi il lato BC, (fig. 58) del triangolo sferico ABC, e si formi l'intiera circonferenza, si avrà un secondo triangolo, di cui i lati saranno gli archi AB, AC, e l'arco $BcbC$; questo triangolo corrisponde a un angolo triedro, nel quale l'angolo piano misurato dall arco $BcbC$ è maggiore di una mezza circonferenza. Similmente si potrebbero prolungare due lati, ed anche tutti tre i lati del triangolo ABC, e formare in tal modo triangoli, nei quali vi sarebbero due o tre lati maggiori di una mezza circonferenza. Ma è facile vedere che se si toglie ciascuno di questi lati da una circonferenza intera si ritorna al triangolo ABC, in cui ciascun lato è minore di una mezza circonferenza. Perlochè la cognizione degli elementi del triangolo ABC basta a determinare quelli, per esempio, del triangolo formato dagli archi AB, e AC, e dall'arco $BcbC$ maggiore di una mezza circonferenza. Per questa ragione si considerano soltanto quei triangoli sferici, nei quali ciascun lato è minore della mezza circonferenza.

Caratteri dell' uguaglianza dei triangoli sferici.

291. Paragonando i triangoli sferici cogli angoli triedri corrispondenti, e richiamando ciò che è stato dimostrato (n° 72, e 77, 78, 79), ne risulterà che due triangoli sferici descritti su la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono uguali o simmetrici, se hanno:

1°. *I tre lati uguali ciascuno a ciascuno.*

2°. *Un angolo uguale compreso fra due lati uguali ciascuno a ciascuno.*

3°. *Un lato uguale adiacente a due angoli uguali ciascuno a ciascuno.*

4°. *I tre angoli uguali ciascuno a ciascuno.*

Questa ultima proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei, nei quali se gli angoli sono uguali, i lati non sono uguali, ma sono proporzionali. Al contrario nei triangoli sferici, che hanno gli angoli uguali, e sono descritti sopra la stessa sfera, o sopra sfere uguali, se i lati fossero proporzionali, essi diverrebbero uguali come archi simili di circonferenze i cui raggi sono uguali. Quindi nei triangoli sferici descritti sopra la stessa sfera, se gli angoli sono uguali, i triangoli non saranno simili; ma o uguali, o simmetrici; saranno però simili, se posta l'uguaglianza degli angoli, sono descritti sopra sfere di diverso raggio.

Proprietà dei triangoli sferici.

PROPOSIZIONE CIX — *TEOREMA.*

292. *In ogni triangolo sferico un lato qualunque è minore della somma degli altri due* (fig. 57).

Dim. Perocchè nell'angolo triedro corrispondente *SABC* ciascun angolo piano è minore della somma degli altri due; e per conseguenza ciascuno degli archi *AC*, *AB*, *BC* che misurano questi angoli è minore della somma degli altri due. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE CX — *TEOREMA.*

293. *La somma dei tre lati di un triangolo sferico è minore della circonferenza di un circolo massimo* (fig. 57).

Dim. Infatti, essendo nell'angolo triedro *SABC* la somma dei tre angoli piani minore di quattro angoli retti, la somma dei lati del triangolo sferico *ABC* che misurano i detti angoli piani dovrà essere minore di una circonferenza di circolo massimo che misura i quattro angoli retti. *C. D. D.*

PROPOSIZIONE CXI — *TEOREMA.*

294. *La somma degli angoli di ogni triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti* (fig. 57).

Dim. Infatti, ciascun angolo di un triangolo sferico *ABC* è minore di due retti; e perciò la somma dei tre angoli è minore di sei retti. Di più, ciascun angolo del triangolo *ABC* è il supplemento di un lato del triangolo sferico supplementario (n° 297), e per conseguenza equivale ad una mezza circonferenza meno questo lato. Dunque la somma dei tre angoli del triangolo *ABC* vale tre mezze

circonferenze meno i tre lati del triangolo supplementario. Or questi tre lati valgono meno di due mezze circonferenze (n° 67); per conseguenza se da tre mezze circonferenze si toglie una quantità minore di due mezze circonferenze, il resto sarà maggiore di una mezza circonferenza. Quindi la somma dei tre angoli del triangolo *ABC* avrà per misura un arco maggiore di una mezza circonferenza; e però la detta somma sarà maggiore di due angoli retti. *C.D.D.*

295. *Corollario*. Dal teorema precedente apparisce che la somma dei tre angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei tre angoli di un triangolo rettilineo; ma varia da due sino a sei angoli retti senza mai uguagliare nè l'uno nè l'altro limite. Laonde essendo dati due angoli di un triangolo sferico non si può trovare il terzo angolo: e così pure è manifesto che l' angolo esterno di un triangolo sferico non è uguale, ma minore della somma dei due interni ed opposti.

PROPOSIZIONE CXII — *TEOREMA*.

296. *In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali. Reciprocamente se due angoli di un triangolo sferico sono uguali, i lati ad essi opposti saranno pure uguali* (fig. 59).

Dim. Sia *ABC* un triangolo sferico isoscele, nel quale si supponga $AB = AC$. Si divida la base in due parti uguali nel punto *D*, e si faccia passare l'arco di circolo massimo *AD*; si avranno i due triangoli *ABD*, *ACD*, nei quali essendo i tre lati rispettivamente uguali, sarà l'angolo $B = C$.

In secondo luogo, supponendo che *abc* sia il triangolo supplementario del triangolo proposto, dall'essere $B = C$ si deduce $ac = ab$; e quindi sarà l'angolo $b = c$; dal che infine risulta l'uguaglianza dei lati *AC*, *AB*. *C. D. D.*

297. *Corollario*. Apparisce da questo teorema che

1°. *Un triangolo sferico equilatero è anche equiangolo, e reciprocamente*.

2°. *In un triangolo sferico isoscele l'arco di circolo massimo condotto dal vertice al punto di mezzo della base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali*.

PROPOSIZIONE CXIII — *TEOREMA*.

298. *In ogni triangolo sferico il lato opposto all' angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore; e reciprocamente* (fig. 60).

Dim. Sia in primo luogo l'angolo *B* maggiore dell'angolo *A*, sarà il lato *AC* maggiore del lato *CB*. Infatti si conduca l'arco di circolo

massimo BD in guisa che risulti l'angolo $ABD = A$ (*) : in virtù della proposizione precedente si avrà $BD = AD$. Ma nel triangolo BDC, il lato BC è minore della somma dei lati BD, DC, ovvero di $AD + DC$; dunque AC è maggiore di CB.

In secondo luogo, sia il lato AC maggiore del lato CB, sarà l'angolo B maggiore dell'angolo A; poichè se fosse minore, o uguale, nel primo caso sarebbe il lato AC minore del lato CB, e nel secondo caso si avrebbe $AC = CB$, contro la supposizione in ambedue i casi; per conseguenza dev' essere l'angolo B maggiore dell'angolo A. C. D. D.

PROPOSIZIONE CXIV — *TEOREMA.*

299. *Se due triangoli sferici, descritti su la stessa sfera, o sopra sfere uguali, hanno due lati uguali respettivamente a due lati, ma l'angolo compreso dai due primi è maggiore dell' angolo compreso dai due secondi, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo; e reciprocamente.*

La dimostrazione è simile a quella fatta pel caso analogo nei triangoli rettilinei.

PROPOSIZIONE CXV — *TEOREMA.*

300. *Due triangoli sferici simmetrici sono equivalenti* (fig. 61).

Dim. Sieno ABC, DEF due triangoli sferici simmetrici, nei quali il lato $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$; dico che l'aja del triangolo ABC è uguale a quella del triangolo DEF. Infatti, i lati dei due triangoli essendo uguali, le corde da essi sottese saranno pure uguali e formeranno triangoli rettilinei uguali; per conseguenza i circoli circoscritti a questi triangoli saranno uguali. Quindi se per i poli O, e P di questi circoli si conducano archi di circoli massimi agli angoli dei triangoli proposti, questi archi saranno uguali (n° 285); e si formerà in questo modo sopra ciascun lato un triangolo sferico isoscele. Or i tre triangoli isosceli del primo dei triangoli dati saranno evidentemente uguali ai tre del secondo, ciascuno a ciascuno; poichè nei triangoli isosceli non esiste uguaglianza per simmetria (n° 281), dunque le aje dei triangoli proposti saranno formate nello stesso modo con quelle dei nuovi triangoli e però i triangoli proposti saranno equivalenti. C. D. D.

301. *Scolio.* Se i poli O, e P dei circoli circoscritti ai triangoli

(*). Ciò è sempre possibile. Infatti, si divida l'arco AB in due parti uguali, e pel punto di mezzo si faccia passare un arco di circolo massimo perpendicolare ad AB, che incontri l' arco AC nel punto D; indi per questo punto e pel punto B si faccia passare un arco di circolo massimo DB, risulteranno due triangoli rettangoli uguali, e però sarà l'angolo $ABD = A$.

cadessero fuori di questi, la dimostrazione sarebbe sempre la stessa, come è facile vedere.

Misura del triangolo sferico.

PROPOSIZIONE CXVI — *TEOREMA*.

302. *Il fuso sta alla superficie della sfera come l'angolo dei semicircoli massimi che comprendono il fuso sta a quattro angoli retti* (fig. 62):

Dim. Sia il fuso *AMBN* compreso dai due semicircoli massimi *AMB*, *ANB* che terminano al diametro comune *AB*. L'angolo *MAN* formato dai due archi *AM*, *AN*, e che dicesi *angolo del fuso*, può essere misurato (n° 285) dall'angolo *MON*, ovvero dall'arco *MN* del circolo massimo *MNP*, che ha per asse il diametro *AB*. Oltre a ciò, è evidente che sopra una medesima sfera due fusi sono uguali quando i semicircoli che li comprendono formano tra loro angoli uguali. Ciò premesso, è facile dimostrare la proposizione enunciata. Infatti, supponiamo in primo luogo che l'arco *MN* sia commensurabile colla circonferenza *MNP*; e che stia a questa come 3 a 12. Dividendo la circonferenza in 12 parti uguali, l'arco *MN* conterrà 3 di queste parti; poi facendo passare per i punti di divisione, e per i punti *A*, *B*, 12 circoli massimi, la superficie sferica sarà decomposta in 12 fusi uguali, 3 dei quali saranno contenuti nel fuso *AMBN*. Quindi il fuso accennato sta alla superficie sferica come l'arco *MN* alla circonferenza *MNP*, oppure come l'angolo *MAN* del fuso sta a quattro angoli retti.

Se l'arco *MN* fosse incommensurabile colla circonferenza, la proposizione enunciata si dimostrerebbe col ragionamento fatto nella geometria piana in un caso analogo (*). *C. D. D.*

303. *Scolio.* È manifesto che colla stessa dimostrazione si potrebbe provare che l'unghia sferica *AMBN* sta alla sfera come l'arco *MN* sta alla circonferenza *MNP*.

PROPOSIZIONE CXVII — *TEOREMA*.

304. *Il fuso ha per misura il prodotto del suo arco moltiplicato pel diametro della sfera*; *e l'unghia ha per misura il prodotto del fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera medesima.* (fig. 62).

Dim. Imperocchè, si ha dalla proposizione precedente che il fuso *AMBN* sta alla superficie sferica come l'arco *MN* alla circonferenza *MNP*; per conseguenza il fuso accennato sta alla superficie sferica come l'arco *MN* moltiplicato pel diametro *MP* sta alla circon-

(*) Vedi Geom. Piana n.° 341, 2.ª Ediz.

ferenza MNP moltiplicata per lo stesso diametro. Ma la circonferenza MNP moltiplicata pel suo diametro è la misura della superficie sferica, dunque il fuso ha per misura l'arco MN, che misura il suo angolo, moltiplicato pel diametro della sfera.

In secondo luogo, essendo l'unghia sferica alla sfera come il fuso alla superficie sferica, sarà l'unghia alla sfera come il fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera sta alla superficie sferica moltiplicata pel terzo dello stesso raggio. Ma la superficie sferica moltiplicata pel terzo del raggio della sfera è la misura di questa, dunque l'unghia avrà per misura il fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera. *C. D. O.*

305. *Corollario* I. Il settore circolare MON avendo per misura il prodotto dell'arco MN per la metà del raggio MO, sarà in virtù della proposizione precedente il fuso $AMBN$ quadruplo del detto settore. Quindi il triangolo sferico birettangolo AMN, che è metà del fuso, sarà doppio dello stesso settore circolare. Che se poi il triangolo AMN fosse trirettangolo, allora la sua aja sarebbe uguale a quella di un semicircolo massimo, cioè sarebbe la ottava parte della superficie sferica; e per conseguenza la superficie sferica potrà essere rappresentata da otto triangoli sferici trirettangoli.

306. *Corollario* II. Se dunque si prenda per unità delle superficie sferiche il triangolo trirettangolo, che chiameremo K, e per unità di angolo l'angolo retto, che chiameremo R, si avrà la proporzione qui appresso.

$$\text{Fuso } AMBN : 8K : : \text{arco } MN : \text{circ. } MNP,$$

ovvero, chiamando A l'angolo del fuso,

$$\text{Fuso } AMBN : 8K : : A : 4R,$$

e moltiplicando per 2 i termini della seconda ragione,

$$\text{Fuso } AMBN : 8K : : 2A : 8R,$$

e dividendo per 8 i conseguenti.

$$\text{Fuso } AMBN : K : : 2A : R.$$

Ma in luogo di K, e R si possono mettere le unità che rappresentano, dunque si avrà in fine.

$$\text{Fuso } AMBN = 2A.$$

vale a dire che il *fuso è uguale al doppio del suo angolo*.

Questa espressione è di pura convenzione; poichè essa serve a dinotare sotto forma abbreviata la proporzione or ora ottenuta, cioè che il fuso sta al triangolo trirettangolo, che è l'unità superficiale, come il doppio dell'angolo del fuso sta all'angolo retto, che è l'unità angolare. La differenza sta dunque in questo; cioè, che nella proporzione le due unità, superficiale, ed angolare, sono espresse, mentrechè nella uguaglianza

$$\text{Fuso } AMBN = 2A,$$

le stesse unità si devono sottindere; il che non può mai produrre equivoco di sorta, e molto meno indurre in errore.

PROPOSIZIONE CXVIII — TEOREMA.

307. *L'aja d'un triangolo sferico ha per misura il raggio della sfera moltiplicato per la somma dei tre archi che misurano i tre angoli del triangolo diminuita d'una mezza circonferenza* (fig. 58).

Dim. Sia ABC un triangolo sferico. Si prolunghi il lato BC finchè si formi il circolo massimo $BCbc$, di cui fa parte; indi si prolunghino ancora gli altri due lati AB, AC al di sopra, e al di sotto del piano $BCbc$; essi incontreranno questo piano nei punti, b, e c; ed essi stessi s'incontreranno nel punto a al di sotto del piano medesimo.

Or siccome due circoli massimi si tagliano sempre scambievolmente in due parti uguali (n° 214), così sarà BCb una semicirconferenza, come ancora Cbc; per conseguenza si avrà $BCb = Cbc$, e togliendo la parte comune Cb, resterà $BC = bc$. Nello stesso modo si dimostra che $CAc = ACa$, e tolta la parte comune AC, risulterà $Ac = Ca$; e così pure sarà $BAb = ABa$, e sottratta la parte comune AB, resterà $Ab = Ba$.

Dunque i triangoli Abc, ed aBC hanno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno; e perciò sono equivalenti, non potendo combaciare per essere simmetrici, come è facile vedere. Da ciò si deduce che la somma dei triangoli ABC, ed Abc equivale alla somma dei triangoli ABC, ed aBC, vale a dire al fuso $ABaCA$ il quale ha per angolo l'angolo A del triangolo proposto.

Ciò premesso, l'emisfero $ABCbc$, superiore al piano $BCbc$, è composto de' quattro triangoli sferici ABC, Abc, ABc, AbC, cioè del fuso sferico che ha per angolo A, e dei due triangoli ABc, AbC; e riflettendo che, se a ciascuno di questi due triangoli si aggiunge il triangolo proposto ABC, ne risultano i due fusi sferici che hanno per angoli B e C, si conchiuderà che la somma dei tre fusi sferici; che hanno per angoli A, B, C equivale alla superficie dell'emisfero più due volte il triangolo ABC; e però il doppio triangolo ABC equivarrà alla somma dei tre fusi diminuita della superficie dell' emisfero. Ma ciascuno di quelli fusi equivale al prodotto dell'arco che misura il proprio angolo pel diametro della sfera (n° 304), e la superficie dell'emisfero equivale al prodotto di una semicirconferenza di circolo massimo pel diametro medesimo, dunque il doppio triangolo ABC equivale al diametro moltiplicato per la somma de' tre archi che misurano i tre angoli del triangolo diminuita di una mezza circonferenza; e perciò il triangolo ABC avrà per misura il raggio della sfera moltiplicato per la somma dei detti archi diminuita di una mezza circonferenza. *C. D. D.*

308. *Scolio*. La superficie della sfera avendo per misura il diametro moltiplicato per la circonferenza di un circolo massimo, ovvero il raggio moltiplicato per due volte la circonferenza di un circolo massimo, segue dalla proposizione precedente che la superficie del triangolo sferico sta a quella della sfera come la somma dei tre

archi, che misurano gli angoli del triangolo diminuita di una mezza circonferenza sta a due circonferenze di circolo massimo. Quindi mettendo in luogo degli archi gli angoli da essi misurati, si avrà il teorema che Cavalieri dimostrò il primo, cioè che

La superficie del triangolo sferico sta a quella della sfera come l'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sopra due angoli retti sta ad otto angoli retti.

Se dunque si esprime con E l'eccesso della somma dei tre angoli A, B, C sopra due retti, e si prende per unità di misura delle superficie sferiche il triangolo trirettangolo, e per unità degli angoli l'angolo retto, e di più si osservi che la superficie sferica è uguale ad otto triangoli trirettangoli, il teorema sopraccennato sarà espresso dalla proporzione.

$$\text{Triangolo } ABC : 8 : : E : 8,$$

dalla quale si deduce evidentemente

$$\text{Triangolo } ABC = E;$$

e per conseguenza si potrà dire che

La superficie di un triangolo sferico qualunque ha per misura l'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.

È questa una espressione abbreviata del teorema del Cavalieri, che non può produrre veruno equivoco, allorchè vi si sottintendano le due unità, cioè l'una che serve di misura alle superficie sferiche, e l'altra agli angoli.

Risoluzione di alcuni problemi.

PROPOSIZIONE CXIX — *PROBLEMA*.

309. *Essendo dati i tre lati di un triangolo sferico, trovare i suoi angoli* (fig. 63).

Soluzione. In luogo del triangolo sferico, si considererà l'angolo triedro, che risulta unendo i tre vertici del triangolo proposto col centro della sfera.

Sia dunque $SABC$ un angolo triedro, di cui sono dati i tre angoli piani ASB, BSC, ASC, e supponiamo primieramente che si voglia trovare l'angolo diedro $ASBC$. Si prendano su gli spigoli le parti uguali SA, SB, SC; e si conducano le rette AB, BC, AC; indi per un punto O dello spigolo SB s'innalzino su questo nelle facce ASB, BSC le perpendicolari OM, ed ON, le quali (n° 70), incontreranno le rette BA, BC. L'angolo MON è l'angolo che si vuole determinare, poichè esso è la misura dell'angolo diedro $ASBC$.

Ciò premesso, si facciano sopra un piano gli angoli asb, bcs, csa' respettivamente uguali agli angoli ASB, BSC, ASC della figura in rilievo; prendasi $sa = sb = sa' = SB$, e si uniscano ab, bc, ca'. I triangoli asb, bsc, csa' saranno respettivamente uguali ai triangoli ASB, BSC, CSA, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali. Se dunque colle rette ab, bc, ca' si costruisce un triangolo

$a''bc$, questo triangolo sarà uguale al triangolo ABC, poichè i loro lati sono respettivamente uguali.

Si prenda ora $bo = BO$, e che nella figura piana come in quella in rilievo può esser qualunque, pel punto o si conduca mn perpendicolare sopra sb; il triangolo mob sarà uguale al triangolo MOB, poichè hanno un lato $bo = BO$, adiacente a due angoli uguali ciascuno a ciascuno, cioè $mob = MOB$ come retti, e $mbo = MOB$ a cagione della uguaglianza dei triangoli asb, ed ASB. Per la stessa ragione saranno uguali i triangoli bon, e BON, onde si avrà $om = OM$, ed $on = ON$.

Si faccia inoltre $bm' = bm$, e si congiunga $m'n$, il triangolo $m'bn$ sarà uguale al triangolo MBN; poichè hanno due lati uguali ciascuno a ciascuno, cioè $bm' = bm = BM$, e $bn = BN$; e questi lati sono compresi fra gli angoli cba'', e CBA uguali in virtù della uguaglianza dei triangoli $a''bc$, ed ABC. Quindi sarà $m'n = MN$.

Se dunque colle rette om, on, $m'n$ si costruisca il triangolo $m'no'$ questo triangolo sarà uguale al triangolo MON; dappoichè questi triangoli avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno. Laonde l'angolo $m'o'n$ sarà uguale all'angolo cercato MON.

Nello stesso modo si potranno ottenere i due altri angoli driedri, ossia gli angoli piani che li misurano. *C. D. F.*

310. *Scolio*. È facile vedere che la costruzione precedente può sempre applicarsi, qualunque sieno i tre angoli piani, purchè sono tali da poter formare un angolo triedro. Si vede ancora che il problema ammette una sola soluzione.

PROPOSIZIONE CXX — *PROBLEMA*.

311. *Essendo dati i tre angoli di un triangolo sferico, trovare i suoi tre lati.*

Soluzione. Sostituendo al triangolo proposto l'angolo triedro che gli corrisponde, il problema si riduce a trovare gli angoli piani di un angolo triedro allorchè sono dati i suoi angoli driedri M, N, P. Ciò posto, si chiami d l'angolo retto, e si consideri l'angolo triedro supplementario, gli angoli piani di questo saranno espressi da $2d - M$, $2d - N$, e $2d - P$. Quindi applicando le costruzioni fatte nella proposizione precedente si potranno determinare successivamente i tre angoli diedri dell'angolo triedro supplementario. Siano A, B, C questi tre angoli diedri, è manifesto che gli angoli piani dell'angolo triedro proposto verranno espressi respettivamente da $2d - A$, $2d - B$, e $2d - C$, e però il problema sarà risoluto. *C. D. F.*

PROPOSIZIONE CXXI — *PROBLEMA*.

312. *Essendo dati due lati di un triangolo sferico, e l'angolo da essi compreso, trovare il terzo lato* (fig. 63):

Soluzione. Questo problema si riduce al seguente: dati in un an-

golo triedro due angoli piani e l'angolo diedro compreso, trovare il terzo angolo piano. Siano dunque ASB, e BSC i due angoli piani dati, si faccia $SA = SB = SC$, s' innalzino sopra SB le perpendicolari OM, ed ON, e si congiunga MN, l'angolo MON essendo la misura dell'angolo diedro $ASBC$ che si suppone dato, si conoscono nel triangolo MON due lati e l'angolo compreso. Quindi si può costruire questo triangolo, e dedurne l'angolo piano incognito ASC.

Infatti si costruiscano sopra un piano gli angoli asb e bsc rispettivamente uguali agli angoli ASB, e BSC della figura in rilievo; e si prenda $sa = sb = sc = SB$, i triangoli asb, e bsc saranno respettivamente uguali ai triangoli ASB, e BSC. Si faccia inoltre $bo = BO$, e pel punto o si conduca la retta mn perpendicolare a sb; i triangoli mob, e nob saranno rispettivamente uguali ai triangoli MOB, e NOB.

Ciò premesso, si costruisca un triangolo $m''o''n''$, in cui l'angolo $m''o''n''$ sia uguale all'angolo dato formato dalle facce ASB, e BSC, e sia $m''o'' = mo = MO$, e $n''o'' = no = NO$. Questo triangolo sarà uguale al triangolo MON, poichè avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali; e ne risulterà $m''n'' = MN$.

Coi lati mb, bn e $m''n''$ si costruisca il triangolo $m'bn$; questo triangolo sarà uguale al triangolo MBN; poichè avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno.

Su la retta bm' si prenda $ba'' = ba$, e si congiunga ca'', il triangolo $a''bc$ sarà uguale al triangolo ABC, poichè gli angoli $a''bc$, ed ABC sono uguali a cagione della uguaglianza dei triangoli $m'bn$, e MBN; e di più si ha $bc = BC$, e $ba'' = ba = BA$.

Da ciò risulta ancora $a''c = AC$. Si costituisca dunque un triangolo $a'sc$, di cui i lati sc, e sa' sieno uguali, e la base sia uguale ad $a''c$; questo triangolo sarà uguale al triangolo ASC, poichè essi avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno. L'angolo $a'sc$ sarà dunque il terzo angolo piano richiesto. *C. D. F.*

313. *Scolio.* Conoscendo il terzo angolo piano, si potranno ottenere i due altri angoli diedri colla costruzione del n° 309.

È facile poi vedere che il problema proposto ammette una sola soluzione.

PROPOSIZIONE CXXII — *PROBLEMA.*

314. *Essendo dati un lato ed i due angoli adiacenti di un triangolo sferico, trovare i rimanenti lati ed il terzo angolo.*

Soluzione. Sostituendo al triangolo sferico l' angolo triedro corrispondente, rappresentino A l'angolo piano dato, M, ed N gli angoli che servono di misura agli angoli diedri adiacenti dati. In virtù del teorema del n° 68, l'angolo triedro supplementario avrà due angoli piani uguali a $2d—M$, ed a $2d—N$: e l'angolo diedro compreso sarà espresso da $2d—A$ (chiamando d l'angolo retto).

Applicando le costruzioni del problema precedente, si potrà determinare il terzo angolo piano del triedro supplementario, e poi

colle costruzioni del n° 309, i suoi due altri angoli diedri. Sieno *P* il terzo angolo piano, *B* e *C* i due angoli diedri così determinati, l'angolo triedro proposto avrà necessariamente un terzo angolo diedro espresso da $2d-P$ ed i due altri angoli piani saranno respettivemente uguali a $2d-B$, ed a $2d-C$. Quindi tutte le sue parti saranno conosciute. *C. D. F.*

315. *Scolio.* La risoluzione de'problemi precedenti fa vedere che coll'ajuto dell'angolo triedro supplementario essi si riducono a due soli. Così pure, se fossero dati di un triangolo sferico due lati ed un angolo opposto ad uno di questi lati, ovvero due angoli ed un lato opposto ad uno di questi angoli, la risoluzione dei due problemi accennati si ridurrebbe a quella di uno di essi in virtù dell'angolo triedro supplementario: e però nella proposizione seguente daremo soltanto la risoluzione del primo.

PROPOSIZIONE CXXIII — *PROBLEMA.*

316. *Essendo dati due lati di un triangolo sferico, ed un angolo opposto ad uno di questi lati, trovare i rimanenti angoli, ed il terzo lato* (fig. 64).

Soluzione. Questo problema si riduce al seguente: dati in un angolo triedro due angoli piani ed un angolo diedro apposto ad uno di questi angoli piani, trovare i rimanenti angoli diedri, ed il terzo angolo piano.

Sia dunque *SABC* l'angolo triedro; supponiamo che siano dati gli angoli piani *CSA*, *BSA*, e l'angolo diedro opposto al primo di questi angoli. Per un punto *A* preso ad arbitrio sullo spigolo *SA* si conducano due piani: il primo *ABE* perpendicolare allo spigolo *SB*, ed il secondo *ADE* perpendicolare allo spigolo *AS*. Essendo questi piani entrambi perpendicolari al piano *BSA*, la loro comune intersezione *EA* sarà perpendicolare a questo medesimo piano. Or essendo *BS* perpendicolare alle due rette *BA*, *BE*, l'angolo piano rettilineo *EBA* sarà la misura dell'angolo diedro *SB*, che per ipotesi è dato. Quindi nel triangolo *ABE* si conosce l'angolo *EBA*, e l'angolo retto *EAB*; di più si conosce ancora il lato *AB*, perchè nel triangolo rettangolo *ABS* è noto il lato *BS*, l'angolo retto *SBA*, e l'angolo *BSA* dato per ipotesi, dunque il triangolo *ABE* è determinato, e perciò sarà noto il lato *EA*. Ma da un'altra parte si conosce il lato *AD*, che fa parte del triangolo *ASD*, dunque si potrà costruire il triangolo *ADE* rettangolo in *A*; e per conseguenza si conoscerà l'angolo *ADE*. Ma la retta *AC* è nota, perchè per ipotesi è dato l'angolo *CSD*, e si conoscono i lati *SC*, *SD* del triangolo *SDC*, dunque nel triangolo *CDA* si conosceranno due lati *AD*, *AC* e l'angolo opposto *CDA*; per conseguenza si potrà determinare il lato *DC*. Finalmente le tre rette *DC*, *SC*, *SD* determineranno il terzo angolo piano *DSC*.

Ciò premesso, si faccia sopra un piano l'angolo *A'S'C'* uguale

all'angolo ASC della figura in rilievo, $A'S'B' = ASB$, si supponga $A'S' = AS$, s'innalzi $A'C'$ perpendicolarmente ad $A'S'$, e si prolunghi finchè incontri $S'B'$ nel punto D'. E manifesto che sarà $A'C' = AC$, $A'D' = AD$, $D'S' = DS$, $C'S' = CS$; e se dallo stesso punto A' si conduca $A'B'$ perpendicolare a $D'S$, si avrà $A'B' = AB$. Si faccia ora al punto B' l'angolo $A'B'E' = ABE$, si conduca la retta $A'E'$ perpendicolare ad $A'B'$, il triangolo $A'B'E'$ sarà uguale al triangolo ABE, e perciò risulta $A'E' = AE$. Volendosi poi costruire il triangolo DAE, si osservi che $A'D' = AD$, $A'E' = AE$, e siccome l'angolo $D'A'E'$ è retto, così se si prenda $A'E'' = A'E'$ e si conduca $D'E''$, si avrà il triangolo $D'A'E''$ uguale a DAE; e quindi l'angolo $E''D'A'$ sarà uguale ad EDA. Il triangolo DCA si potrà costruire osservando che $D'A' = DA$, $CA' = CA$, e l'angolo $E''D'A' = EDA$ opposto a CA. Quindi dal punto A' come centro e col raggio $A'C'$ si descriverà un arco che taglierà $D'E''$ in un punto O, sarà $D'O = DC$; poi con i tre lati $C'S' = CS$, $D'S' = DS$, e $D'O = DC$, si descriverà il triangolo $D'S'C''$; l'angolo $D'S'C''$ sarà il terzo angolo piano, ed il problema sarà ridotto a quello del n. 311. *C. D.F.*

317. *Scolio* I. Nella costruzione precedente si è fatta la figura nella supposizione che l'angolo $A'S'C'$ fosse maggiore dell'angolo $A'S'D'$; per conseguenza $A'C'$ è maggiore di $A'D'$, ed il triangolo $A'D'O'$ è sempre possibile in un solo modo, come l'angolo triedro. Se l'angolo $A'S'C'$ opposte all'angolo diedro dato, è minore dell'angolo $A'S'D'$ il lato $A'C'$ è ancora minore di $A'D'$, ed il triangolo $A'D'O$, è possibile in due modi diversi, o in un solo, o è impossibile, secondochè $A'C'$ è maggiore, uguale o minore della perpendicolare abbassata da A' sopra $D'O$ (*)

L'angolo solido triedro può aver dunque due soluzioni, una sola, o è impossibile.

318. *Scolio* II. La soluzione precedente suppone 1.° che ciascuno de'due angoli piani dati sia minore di un retto; 2.° che l'angolo diedro dato sia acuto. Quindi non può applicarsi quando la somma degli angoli accennati si suppone uguale o maggiore di due retti, o anche quando fosse minore di due retti, ma uno de'due non sia minore di un retto, come pure quando l'angolo diedro dato fosse o retto o ottuso. Ma siccome il problema precedente in tutt'i casi possibili interessa principalmente la trigonometria sferica, così rimettiamo ai trattati di questa scienza la risoluzione compiuta di esso(**).

(*) Vedi Geom, Pian. 2ª Ediz. n°. 386.

(**) La risoluzione puramente geometrica del problema di cui è parola nel testo, ha condotto geometri valentissimi a risultamenti che non sono sempre d'accordo fra loro. Ciò nasce, almeno secondo la nostra maniera di vedere, perchè con l'ajuto delle sole considerazioni geometriche è difficile tener dietro a tutte le condizioni, che implicitamente es'stono nel problema accennato, quando si voglia risolverlo compiutamente. La sola analisi algebrica adoperata come si conviene è capace di abbracciare tutte le condizioni, che vi possono essere, senza escluderne alcuna, come può vedersi nell'eccellente trigonometria del ch. Professore *F. Amante*.

319. *Scolio.* III. La risoluzione de'problemi precedenti offre il mezzo di assegnare i caratteri che determinano gli angoli solidi poliedri.

Supponiamo che l'angolo solido S (fig.26) sia formato da quattro angoli piani ASB. BSC, CSB', $B'SA$. La conoscenza di questi angoli non basta per determinare l'angolo solido; perocchè con gli stessi angoli piani si potrebbe formare una infinità di angoli solidi. Infatti, se per gli spigoli SA, SC si faccia passare il piano ASC, l'angolo solido S sarà decomposto in due angoli triedri $SABC$, $SAB'C$. Or la conoscenza de'due angoli piani ASB, BSC non basta per determinare l'angolo triedro $SABC$. ma vi bisogna quella del terzo angolo piano ASC; e lo stesso avviene per l'angolo triedro $SAB'C$, che non resta determinato dalla sola conoscenza de'due angoli piani CSB', $B'SA$.Quindi è manifesto che con quattro angoli piani si potranno formare tanti angoli solidi diversi quanti saranno i valori diversi che si potranno dare all'angolo ASC.Ma se alla conoscenza dei quattro angoli piani si aggiunga quella dell'angolo diedro SB, allora l'angolo solido triedro $SABC$ sarà totalmente determinato, e per mezzo del problema risoluto (n° 312) si potrà trovare il terzo angolo piano ASC; il che determinerà ancora l'altro angolo triedro $SAB'C$; e per conseguenza l angolo solido S sarà determinato.

È facile ora vedere che per determinare un angolo solido formato da cinque angoli piani, non basta conoscere questi angoli, ma vi bisogna ancora la conoscenza di due angoli diedri; converrebbe conoscere tre angoli diedri ed i sei angoli piani nell'angolo solido formato da questi angoli, e così in progresso.

Abbiamo dimostrato(n°80) che: *Due angoli poliedri sono uguali fra loro, allorchè sono composti di un medesimo numero di angoli, triedri rispettivamente uguali, e disposti nello stesso ordine.*

Dietro alle cose precedenti è facile ora vedere che si potrebbe dare a questo teorema un'altra enunciazione, dicendo:

Due angoli poliedri sono uguali fra loro, allorchè sono composti di un medesimo numero di angoli piani rispettivamente uguali. e disposti nello stesso ordine; e di più un angolo diedro del primo sia uguale all' angolo diedro omologo del secondo, se gli angoli solidi sono tetraedri; due angoli diedri del primo siano uguali agli angoli diedri omologhi del secondo, se gli angoli solidi sono pentaedri; e così di seguito (*).

(*) Euclide non ha parlato che de'soli angoli solidi triedri, e lo ha fatto in un modo imperfettissimo. Quindi è avvenuto che Clavio, il migliore interpetre di quel geometra, è caduto in errori grossolani, quando nel suo comento ha voluto assegnare i caratteri dell'uguaglianza degli angoli solidi poliedri. Tutta questa dottrina appartiene ai geometri moderni.

INDICE

Fig.a 13
Fig.a 25
Fig.a 33

Fig.a 37
Fig.a 44
Fig.a 56
Fig.a 57